宿題の解答という名前の雑談集

A（阿原）: ああ、O 君、ちょっと頼みがあるんだけど。

O（阿原研学生の O 君）: はい、「ちょっと」だけお伺いします。

A : うん、ちょっと、この原稿を読んで「宿題」の解答を作っておいてほしいんだけど。（ドサッ）

O : これですか？分量多くないですか？

A : うん、でも宿題は各回の最後にちょこっとあるだけだから。たぶん幾何の勉強にもなるし、いいと思うよ。

O : わからないところは教えてください。というか、わからないところだらけかもしれないですけれど (草)[1]

第 1 章

（第 1 章宿題 1 ）実際に顔を観察して、曲面としての曲がり具合を調べてみよ。

O : 先生、僕、この記事読んでいました。数学セミナーの連載ですよね。

A : うん。おもしろかった？今度単行本化することになってね。

O : 連載は正直難しかったです。絵とかは面白いんですけど。単行本にするなら、よっぽど説明を丁寧に加えないと難しすぎますよ。

A : そう … 。じゃ、本文のほうはいっぱい「盛る」ことにするね。

O : で、第 1 章の宿題なんですけど、これ何ですか。

A : 何って、宿題。(しらを切る。)

O : 実際に顔を観察して曲がり具合を調べよ、って何を答えればいいのかわかりません。

A : うん、これはね、あんまりまじめに出題してない。

O : 解答をつくれないですよ。こんなの。

A : まぁ、だいたいの話でいいんだけど、顔のパーツで「きゅっと出っ張っているところ」はあるよね。

O : 鼻とか顎はそうですね。

A : 顎は丸い人もいるかもしれないけど。最近顎の下に肉がついてきてさぁ。

O : 数学の話に行ってください。

[1] 昔は「(笑)」と書き、その後「ww」と書くようになったようだが、さらに最近では「草生える」などというようなので、このように書いた（著者)。

A：ごめん。こういうところは曲がり具合が大きいので、曲率が大きいわけだ。

O：本文中では「曲率」と一言でゴマカしてますけれど、ガウス曲率のことですね。ガウス曲率の定義は本文中なしですか。

A：うん。今回の話は最初から「微積分なし、方程式なし」で始めたからね。「ガウス曲率は shape operator の行列式です」なんて書くと、そこから全く読まれなくなっちゃう。shape operator 自身に微分が出てくるしね。

と、いうわけで、曲率も何もかもとりあえずは直感勝負でいくことにしたんだよねぇ。

O：じゃあ、「お椀のように丸いの正のガウス曲率、自転車のサドルのようになっているのが負のガウス曲率」ということを認めて、あとは気合で乗り切る感じですか。

A：うん。だから、ここでは「鼻の曲率は大きくて、頬の曲率は（正だけど）小さい」というようなことを指摘すればいいとおもうんだよね。

O：そういうことならわかりました。でもそれって本文に書いてあることですよね。別に宿題にしなくても。

A：いやいや、ここが大事なんだ。「鼻の曲率は大きくて、頬の曲率は（正だけど）小さい」ということを本で読んだり話を聞いたりすることと、実際に鏡で自分の顔を見て「ああ、鼻の曲率はおおきいんだーー」って感じることは全然違うとおもうんだよね。そういう体験を実際にしておくこと、という宿題なんだよね。

O：そういうことなら、なおさらよくわかりました。1 つ聞いていいですか。

A：どうぞ。

O:本文では「首のところは円筒形で」と書いてありますけど、ここは異論があるんじゃないですか。むしろ曲率がマイナスでしょう？

A：ああ、そこね。ところで、顎の下（つまり首）って、ひげを剃りにくいなぁと思ったことない？というか、O 君はあんまりひげが濃くないから感じたことないかな。

O：いや、わかりますよ。要するに平らな形の髭剃りを使うと、うまく首の面に髭剃りを当てられないということでしょう？

A：ああ！よかった！この件について共感できる人を初めて見つけられたよ。ちょっとこの件について語っていいかな。つまりね、剃刀の刃はまっすぐなものと仮定するところから始める。もし、剃刀を上から下へ（もしくは下から上へ）と動かすと、剃刀の刃が当たるところはほとんど 1 点というか少ししか当たらないだよね。（すっかり熱くなっている。）だから剃刀を横に向けて右から左へと動かそうとするんだけど、今度は剃刀の両端ばっかりが肌にあたって、うまく剃れないんだ。だからだから、仕方なく、剃刀を斜めにするだろう？そうすると、肌

を切ってしまいそうになるんだよね。まったくもって！うまく剃れないものかとずっと考えているんだけど、なかなかこれが奥が深い。

O：電動カミソリにしたらどうです？

A：うむ。電動も持っているし、忙しい時には使うけれどね、やっぱり剃った後の気持ちよさが違うんだよなぁ。（しばしため息。）

O：それが結論ですか？

A：そういうことではなくて、つまりね、棒状のものを首筋に充てようとしても縦にも横にもダメだということを言いたいのだよ。というのは首筋が「中央部がくびれた柱」のような形をしているからで、「縦に剃ると真ん中しか当たらない」「横に剃ると両端しか当たらない」という形状をしているからなんだね。これを面の曲がる向きという観点で考えると、水平方向と垂直方向の曲がる向きが違っている証拠なんだよ。こういう形は曲率がマイナスということだ！

O：「首筋は曲率がマイナス」という結論を出すのにずいぶん長かったですが、そういう道筋なんですね。あくまで顔の形で話のオチをつけようと（草）

A：うん。

（第 1 章宿題 2 ）幾何学、特に楕円幾何学、双曲幾何学の歴史について調べてみよ

O：これは僕でも調べられますが、今覚えている範囲で言ってみていいですか。

A：どうぞ。

O：幾何学の元祖は古代ギリシャのユークリッドですね。ユークリッドは「原論」という教科書を書いて、そこには幾何学の基本が書かれていたのです。こんなでいいですか。

A：端折りすぎだとおもうけど、参考文献を挙げることにすればいいかな。

O：ユークリッド原論の日本語訳[2]がありますよね。

A：ユークリッド原論は体系化された学問としては歴史上初めての書物と言ってもいいと思う。そういう観点から読んでみるといいと思うよ。

O：現代数学を勉強するのに、ユークリッド原論は必須なのでしょうか。

A：数学という学問の基礎になったという点では非常に重要だけれども、ユークリッド原論を読破しなければ現代数学が勉強できないということはないね。

O：双曲幾何学については、ガウスが発見したという話を聞いたことがあります。

[2]中村，寺阪，伊東，池田訳「ユークリッド原論　追補版」，共立出版，2011 年

A：双曲幾何学の歴史や入門については寺阪先生の「非ユークリッド幾何の世界」[3] という本をお勧めします。実はユークリッド的ではない幾何学の存在は、19 世紀初頭にほぼ同時期に 3 人の数学者によってそれぞれ提唱されたものなんだ。ドイツ人のガウスのほかに、ロシア人のロバチェフスキー、ハンガリー人のヤーノシュ・ボリャイだね。

O：それぞれ提唱された、というのはどういうことでしょうか。

A：現代のように一人の数学者の書いたものが瞬時に全世界に知れ渡る（インターネットのような）仕組みは、19 世紀にはもちろんなかったからね。

O：お互いにほかの人が発見したことを知らなかったということですね。

A：うん。論文として最初にロバチェフスキーが発表したということだけど、ガウスはそれに先立って理論は完成させていて、ただ発表はしていなかったということだよ。ボリャイはロバチェフスキーに少し遅れてはいるが、ほぼ同時期に発表している。

O：なかなか複雑ですね。それで 3 人の発見ということになっているのですね。

A：詳しい話は寺阪先生の本をぜひ読んでください。

O：楕円幾何学はどうなんですか。

A：それを調べるのが君への課題なんだけどなぁ。

O：あ、そうでした。では今度までに調べておきます。

A：答えだけ言うと、リーマンという数学者だよ。ドイツ人だね。

O：そうなんですか。質問なんですが、球面自体はユークリッドの時代からあったと思いますし、球面を用いた幾何学というのと楕円幾何学は違うのですか？

A：本質的には非常に近いね。球面の上の幾何学はギリシャ時代から研究されているのだが、これはあくまでも 3 次元の立体幾何の一つの分野として研究されていたようだね。

O：では、リーマンの果たした役割はなんなのでしょうか。

A：リーマンは、今でいうところの多様体論の創始者だね。近代的な幾何学の先駆けだと考えてもらえばいい。この本の本文でも、「曲面と地図」の話が出てくるけれど、あの発想はリーマンによるものだね。つまり、曲面を地図ベースで考えようということなんだ。

O：曲面は曲がっていますが、地図は平らだというところが問題なのですか。

A：そうだね。だから、地図は「縮尺がいたるところ異なっている」と考えざるを得ないわけだし、その縮尺の分布（いかように縮尺が変化しているか）が曲面の曲がり具合を反映していると考えることができる。

[3] 寺阪英孝著「非ユークリッド幾何の世界　新装版」，講談社，2014 年

O : 曲面論を勉強するとまず第 1 基本形式（計量）というのを習いますが、これがだいたい縮尺の分布に当たるという考えで大丈夫ですか。

A：そうだね。あと、「shape operator」というのを習うと思うけれと、これが曲面の形を決める指標になっているね。

O：参考文献を教えてください。

A：いい本がたくさんあるけれど、梅原先生、山田先生の本[4] を薦めておきます。

[4]梅原雅顕，山田光太郎著「曲線と曲面 (改定版) - 微分幾何的アプローチ -」，裳華房，2015 年