第１０章

（第１０章宿題１）　図２と図３と図６とが同じ絡み目であることを示せ。

O：これは、絡み目の絵を変形して、これらの図が移り合うことを示せばいいですね。紐で作ってみると案外簡単そうですが。

A：はい、実際に紐で作ってみると簡単かもしれません。でも、図６の立体的な絵はちょっと困りものだね。何か、「わかる方法」を経由しないと図６のほうは厳しいとおもうよ。まずはこれも３Ｄプリンタで出力してみたので，手に取って見てみて．

（写真）

O：なるほど．手に取って見られるのはいいですが，これは？1 つひとつの成分は正円だと思いますが，それがどの二つを選んでみても絡まっているような形ですね．

A：そのような性質を持つ絡み目をホップ絡み目というんだよ．成分はいくつでも増やすことが可能です．

O：さて，図２から初めて，図３へと変形する段ですが，ちょっと腹案があるんで聞いてもらっていいですか．

A：今回は自信アリですねぇ．

O：まあ．本文を読んでいての感想なのですが，この一輪車空間の話には「ツイスト組みひもが４つ並ぶ形」というのが何度も出てきます．このことがポイントなのではないかとおもうんです．

A：まぁそれはそうだね．

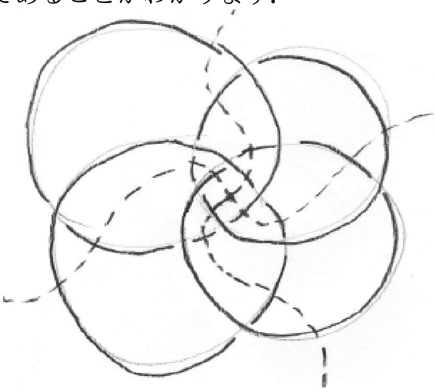
O：だから，最初のホップ絡み目の絵も，４つに分割して，その一つ一つがツイスト組みひもであるようにできないのかなぁと思って絵を眺めていたんですよ．

A：なるほど．

O：そしたらふと見えてきて，いきなり解決しました．これは分かっていると思います．

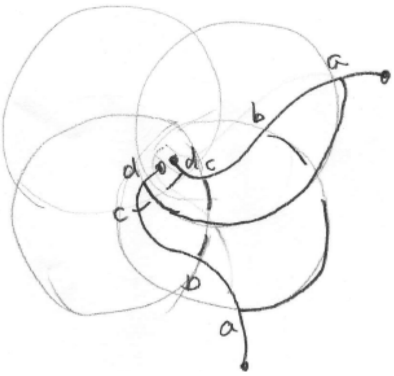
A：筋は大丈夫だね．では図を使ってどうぞ．

O：まず，10 章図 2 を再現しますが，これを図 10-1a のように点線で４つに分割します．点線で分割したパートの１つひとつは 90 度回転で重ねることができますので，一つのパートについて形を検分できれば，残りのパートはその繰り返しであることがわかります．

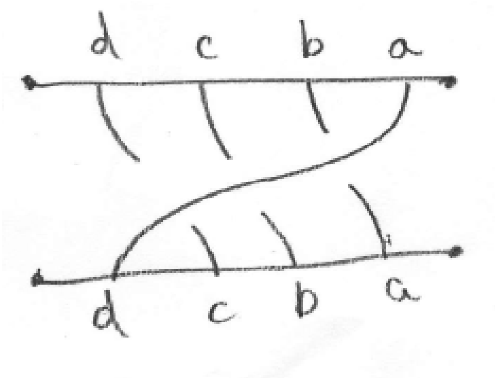


（図 10-1a）

さて，一つのパートを取り出した絵が図 10-1b なのですが，ここに，a,b,c,d という記号を付けておいて，形を整理すると，図 10-1c のようになっています（ニヤリ）これはご覧の通りツィスト組みひもにほかなりません．つまり，ホップ絡み目は４成分のツィスト組みひもを４回繰り返した形（ツィスト組みひもを４回繰り返して完備化した形）であることが示せました．



（図 10-1b）



（図 10-1c）

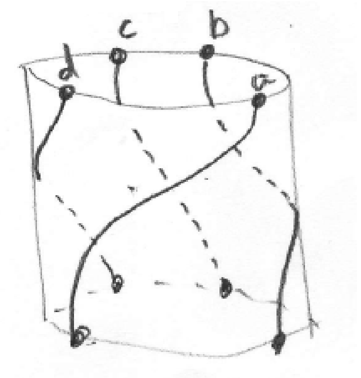
A：お見事です！最近めっきり筋が良くなって僕から口をはさむ余地が少なくなってきたね．

O：ありがとうございます！

A：それでは図６のほうへ行きましょう．これは？

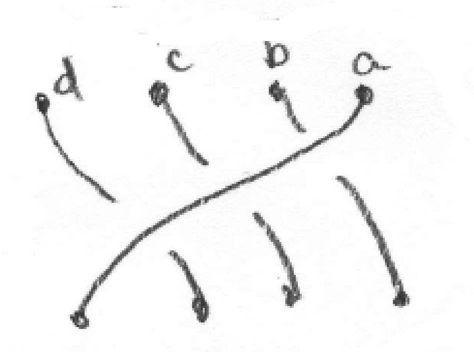
O：これも考え方は似ていると思うんです．ツィスト絡み目というのは４つのものが並んでいて，一番左のものが一番左へと移り，そのほかのものが右側へ一つずれるような組みひもによってあらわされています．これは持ち上がりながら 90 度回転する正方形（図７）の概念とあっていると思うのです．ですが，こちらは決定的な説明がよくわかりません．90 度回転するということとツィスト絡み目を直接関連付けることができないんです．

A：おや，詰まっているのはそこですか．まぁ「何となく」で納得してしまうよりも，きちんと証拠の図を示して解決しようという心の持ちようがイイですね．これはどういうことはないんですよ．正方形を回す図を見ているからわかりにくいんで，単に半透明の円筒を準備して，上端と 4 点 a,b,c,d を取ります．下端にも対応するところにマークを付けておきます．さて，a,b,c,d から出発するような円筒上の道を４本書きます．道の行先は（だいたい）90 度回った位置にある点です．このことを書いてみたのが図 10-1d です．



（図 10-1d）

実はこの図を真正面から見ると，10-1e のようになっていて，これはそのままツィスト組みひもです．



（図 10-1e）

O：ホントだ．ああ，そうか．円筒の上端で，４点 a,b,c,d が反時計回りに並んでいるところがミソなんですね．それで，右端に見える a から出発した道が一番左側の d の位置まで行くことによって，ほかの三本の道の手前側を通ることになることがわかりました．

A：この対応が見えてしまえば，あとは「持ち上がりながら 90 度回転する正方形」×４ということで,「持ち上がりながら 360 度回転する正方形」ということになり，これが「ツィスト組みひもを４つつなげたもの」と対応することがわかります．

O：わかりました．

（第１０章宿題２）　一輪車空間を集合の言葉を使って正確に記述してみて下さい。

O：これは？集合の言葉をということは，$\{(a,b)\mid\cdots\}$ 的なアレですか．

A：そういうことだね．

O：まず，平面の位置を表す $\boldsymbol{p}$ と，一輪車の向きを表す $\boldsymbol{e}$ との組ということでいいでしょうか．つまり

$$\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}) \mid \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^2\}$$

でいいのではないかと思いますが．

A：向きを表す $\boldsymbol{e}$ のほうが間違っているね．向きを表すときには長さを一定にするのがいいね．

O：そういうことでしたら，

$$\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}) \mid \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^2, |\boldsymbol{e}| = 1\}$$

でどうでしょうか．

A：これなら大丈夫．

（第１０章宿題３）　一輪車空間と渦巻きドーナツ宇宙を自分なりに結び付けてください。

O：前の宿題からの続きということですか．つまり，宿題２の記述を使って渦巻ドーナツ宇宙を解釈せよ，ということですね．

A：そういうこと．

O：$S^1 \times E^1$ を円筒と同じように考えましたから，それと同じように考えられるかなぁと思います．

A：S^1 にあたるものをどこだと考えていますか．

O：$\boldsymbol{e}$ についての条件のほうですが，$\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^2, |\boldsymbol{e}| = 1$ と書いてありますので，これは S^1 のことではないかと思います．

A：つまり

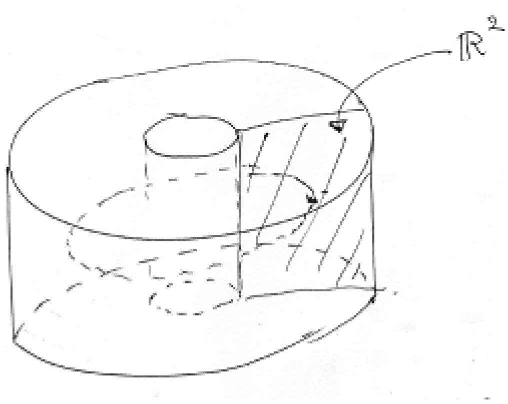
$$\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{e} \in S^1\}$$

ということだね．

O：そうですね．そうすると，一輪車空間は $\mathbb{R}^2 \times S^1$ と同じことだと思います．

A：そうだね．渦巻きドーナツ宇宙との関係はどうかな．

O：まず，$\mathbb{R}^2 \times S^1$ として図 10-3 のようなものを考えてみたのですが，どうでしょうか．



(図 10-3)

A：これでいいと思うけれど，この絵はどのように思いついたかな．

O：$S^1 \times E^1$ を円筒と同じように考えたのがヒントになっているのです．まず S^1 を水平な円周であると考えることにして，円周上の点ごとに垂直な直線を考えると円筒 (宿題：図 6-1c) になります．一方で，円周上の点ごとに水平な線分を考えると穴あき円板（宿題：図 6-1b) になります．$\mathbb{R}^2$ は平面ですから，$\mathbb{R}^2 \times S^1$ としては円周の点ごとに平面を考えるわけです．ですが，それを全部絵に描くことはできないので，垂直方向と水平方向に線分を考えて，平面を正方形で代用しました（代用してよいかどうかという問題は少しあると思いますが）．そうして描いてみたものが図 10-3 です．

A：うん．考え方がしっかり説明できて大変結構です．さて，渦巻きドーナツと比較してみるとずいぶん似ているね．

O：そうなんです．今描いた絵は正方形がぐるりと一周しているようなドーナツです．これはこれで食べてみたい形ではあるのです．が，それはさておきまして，渦巻きドーナツだと，四角形がグルグル回りながら一周するような形で,「正方形がぐるりと一周する」という観点では同じですが，今描いたものは「そのまま回る」感じで，渦巻きドーナツだと「グルグル回りながら回る」という感じです．

A：そうだね．渦巻きドーナツ宇宙のほうは，どうしてグルグル回りながら回るんだろう？

O：それも考えてみたんですけれど，理由は割とはっきりしていると思いました．もともと「一輪車空間でメリーゴーラウンドの上に正方形の板を置いて，その上に一輪車を固定して回してみる」という作業をしたらどうなるか，という話から始まっていたので，メリーゴーラウンドの上に置かれた正方形の板は回るようにセッティングされていたのだと思います．

正方形の板を一周回すと，一輪車の向きも一周回るので，S^1 のほうをぐるりと回るということになるのだと思います.

A：そうだね，だから，本文中にあったように渦を巻きながらドーナツを一周するような軌道になるんだね.