第１１章

（第１１章宿題１）　t をパラメータとするような空間曲線 $P(t)$ の座標が $(\theta(t), y(t), z(t))$ という **3** つの関数の組で与えられているとしよう．上の議論で水平面とよんでいたものは yz-平面であるとし，一輪車の向きを (y 軸からみた) 偏角 θ であらわすものとする．yz-平面上の可微分曲線 $(y(t), z(t))$ に対して，$(\theta(t), y(t), z(t))$ が「半一輪車空間の直線」であるためには，$\theta(t), y(t), z(t)$ はどのような関係式を満たしていなければいけないか．ただし $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$ として考えよ．

O：この章の宿題は手に負えません．手取り足取り教えてください．

A：まず，yz-平面の上に曲線があるとしよう．この曲線の上を一輪車が動くものとして，時刻 t に座標 $(y(t), z(t))$ にいるものと仮定しよう．このことはいいかな．

O：はい．

A：そうすると，時刻 t で一輪車が向いている向きがあるので，その偏角を $\theta(t)$ と書くことにする．このことは大丈夫？

O：たしかに，時刻時刻ごとに一輪車の向きというのはありますので，その角度を y 軸から図った角度を $\theta(t)$ とするわけですね．(t) をつけるのは時刻ごとに θ が変わるので，t の関数のように考えよということですね．

A：一輪車の向きを考えるためには，速度ベクトルがわかるといいね．

O：yz-平面上の可微分曲線 $(y(t), z(t))$ に対して、時刻 t における速度ベクトルは $(y'(t), z'(t))$ であることは本で読んで知っています．

A：$\theta(t)$ は時刻 t における一輪車の向きなので、$(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ は速度ベクトルの長さを１にしたもの．ただし、「半」一輪車空間なので、$(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ と $(-\cos\theta(t), -\sin\theta(t))$ とを区別なく考える．

O：向きが違うだけで方向は同じだから，これらを「同じ」と考えるのですね．

A：そういうこと．だから，偏角 $\theta(t)$ はすべての角を考えるわけではなくて，$\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲でしか考えない．

O：そういうことですか．これをどのように速度と結びつけるかということですが，要するに速度を $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ と $(y'(t), z'(t))$ という書き方ができるわけですが，これらが平行だということですね．

A：そこから関係式を出せるかな．

O：$(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ のほうは長さが 1 になっていますから，高校で習ったように，長さで割って長さを 1 にする作業が必要だと思います．関係式としては、

$$(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = \pm\frac{(y'(t), z'(t))}{\sqrt{(y'(t))^2 + (z'(t))^2}}$$

でいいでしょうか．

A：いいと思うよ．そこで tan で考えるとこの辺りはうまくいくので、tan の式に持ち込んでみてくれるかな．

O：はい．sin を cos で割ればいいので，± の記号と右辺の分母がキャンセルになりますね．つまり

$$\tan\theta(t) = \frac{z'(t)}{y'(t)}$$

となるわけですか．分母は 0 でないと仮定していいでしょうか．

A：気にすべき点ではあるけれど，とりあえずはいいことにしましょう．

（第１１章宿題２） $\theta(t) \neq \frac{\pi}{2}$ **のときに** $x(t) = \tan\theta(t)$ **とおいて，** $(x(t), y(t), z(t))$ **という空間曲線を半一輪車空間の直線と考えることにする．いま，** $xy-$ **平面で，** (x, y) **と** $(x + x_1, y + y_1)$ **を両端とする線分を** $(x(t), y(t))$ **で表すとき（つまり** $(x(0), y(0)) = (x, y)$ **かつ** $(x(1), y(1)) = (x + x_1, y + y_1)$ **であるような線分を表しているとき）** $z(t)$ **の式を求めよ．** z **軸方向の定数の自由度が残るので，特に** $z(1) - z(0)$ **を求めよ．**

A：さて，まずは線分のベクトル方程式を求めてみよう．

O：それはわかります．$(x(0), y(0)) = (x, y)$ かつ $(x(1), y(1)) = (x+x_1, y+y_1)$ であることより、

$$x(t) = x + tx_1, \quad y(t) = y + ty_1 \tag{1}$$

ということですね．

A：ここに宿題 1 の式を代入してみよう．

O：宿題 1 の関係式より、$\tan\theta(t) = \frac{z'(t)}{y'(t)}$ ですが，宿題 2 の仮定により $x(t) = \tan\theta(t)$ ですから，この 2 つを合わせて

$$x(t) = \frac{z'(t)}{y'(t)}$$

ですね．それで、式 (1) をいれると、$y'(t) = (y + ty_1)' = y_1$ より

$$x + tx_1 = \frac{z'(t)}{y_1}$$

となり、整理して

$$z'(t) = y_1(x + tx_1)$$
$$z(t) = \int y_1(x + tx_1)\,dt = y_1\left(xt + \frac{x_1 t^2}{2}\right) + C$$

が得られるということでいいでしょうか.

A：はい．大丈夫です.

O：特に $z(1) - z(0)$ を求めよ．ということなので，$z'(t)$ を 0 から 1 まで定積分すればいいとおもいますので

$$z(1) - z(0) = \int_0^1 y_1(x + tx_1)\,dt = y_1\left(x + \frac{x_1}{2}\right)$$

を得ることができます.

A：それで OK だね.

（第１１章宿題３）　半一輪車空間における点 (x_1, y_1, z_1) をベクトル (x_0, y_0, z_0) に沿って平行移動を考えたいのだが，次のように考える．まず，(宿題 **2**) で $x = 0, y = 0$, $z(1) = z_1$, $z(0) = \tilde{z}$ となるように $\tilde{z}$ を決めておく．次にあらためて (宿題 **2**) で $x = x_0, y = y_0, z(0) = z_0 + \tilde{z}$ とおいて $(x(1), y(1), z(1))$ を求めよ．これは (宿題 **2**) で考えた一輪車直線の xy-平行移動による「持ち上げ」と呼ばれるもので，具体的には

$$(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1 + x_0 y_1)$$

である．この結果を行列の計算

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と比較せよ．なお，$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をハイゼンベルグ群という．本文中では明示しなかったが，半一輪車空間はハイゼンベルグ群の元の右からの積を合同変換とするような空間である．

O：この問題は意味がとても分かりにくいので、ゆっくりお願いします.

A：一輪車空間に含まれる点 (x_1, y_1, z_1) をまず考えるんだね．ここで、x_1 は一輪車の向きの tan であって、y_1, z_1 は平面の座標なのだが、そういう意味づけはしばらく忘れて、宿題 2 で得られた式を使って計算するということなんだ．xy 平面の図形的な意味はわかりにくいので、そこにこだわると先へ進めなくなってしまうからね．

O：xy 平面の図形的意味ですか．確かにわかりません．x は一輪車の向きで y は平面の座標の一部ですから、この二つを組み合わせることに意味はあるのでしょうか．

A：無理に意味づけする必要はないと思うけれど、計算がすんだあとで考え直してみようか．

O：そうですか．宿題 2 で $x = 0, y = 0$, $z(1) = z_1$, $z(0) = \tilde{z}$ とする、と言われていますが、どういうことでしょうか．

A：つまり、$(0, 0)$ と (x_1, y_1) を結ぶような線分について考えて、$z(1) - z(0)$ を求めよ、ということだね．

O：そうですか．そういうことなら計算できます．

$$z(1) - z(0) = y_1 \left(x + \frac{x_1}{2} \right) = \frac{x_1 y_1}{2}$$

より

$$\tilde{z} = z_1 - \frac{x_1 y_1}{2}$$

でいいですか．

A：うん．ここまではそれで大丈夫．そのうえで，今度は (x_0, y_0) と $(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$ での計算に戻って，$z(0) = z_0 + \tilde{z}$ としたうえで $z(1)$ を求めてみよ，というのが二つ目の課題．ここで，$x(0) = x_0$, $x(1) = x_0 + x_1$ であって，$y(0) = y_0$, $y(1) = y_0 + y_1$ と考えてよい．

O：そういうことなら，$z(1) - z(0)$ の式に $z(0) = z_0 + \tilde{z}$ を代入すればいいと思います．計算すると，

$$\begin{aligned}
z(1) &= z(0) + y_1 \left(x_0 + \frac{x_1}{2} \right) \\
&= z_0 + \tilde{z} + y_1 \left(x_0 + \frac{x_1}{2} \right) \\
&= z_0 + \left(z_1 - \frac{x_1 y_1}{2} \right) + y_1 \left(x_0 + \frac{x_1}{2} \right) \\
&= z_0 + z_1 + x_0 y_1
\end{aligned}$$

となり、

$$(x(1), y(1), z(1)) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1 + x_0 y_1) \tag{2}$$

が示されると思います.

A：それでいいね.

O：この計算はこのように式を立てろと言われるとわかりますが，まず式の立て方の意味が分からないのが気になります．あと，問題文に出てくる行列の意味が分かりません.

A：まぁたしかにそのあたりがこの宿題のわかりにくいところかなぁと思う．では，まず，行列のほうから解決していきましょう．まずね，次の行列の掛け算をしてほしいんだよね.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O：はい？ これは？ふつうの意味での行列の掛け算をしていいですか？

A：いいも悪いもそれ以外にできることはないと思うけれど.

O：$(1,1)$ 成分は $1 \cdot 1 + x_0 \cdot 0 + z_0 \cdot 0 = 1$ とか，そういうことですよね.

A：はいはい．文句言わずに計算して.

O：別にいいですけどぉ.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 + x_1 & z_0 + z_1 + x_0 y_1 \\ 0 & 1 & y_0 + y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですね.

A：うん．それで，成分をぐっとにらんで，式 (2) と比べてごらんよ.

O：はい.（式を並べてみる）おや？$x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1 + x_0 y_1$ という 3 つの式は一致していますね．これはたまたまですか？

A：うん．たぶんたまたまかな．と言っても，実は僕もよく知らないので，本当はたまたまではないかもしれないけどね.

O：$x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1 + x_0 y_1$ という 3 つの式の配置はどうなんでしょう？左辺の x_0, y_0, z_0 の配置と対応しているようにも見えますが.

A：いや，そうなんだよ．つまりね，

$$\begin{pmatrix}1 & x_0 & z_0\\ 0 & 1 & y_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & x_0+x_1 & z_0+z_1+x_0y_1\\ 0 & 1 & y_0+y_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

という写像と，

$$(x_0, y_0, z_0) \mapsto (x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1+x_0y_1)$$

という写像は，完全に対応しているよね．

O：はい，$\begin{pmatrix}1 & x_0 & z_0\\ 0 & 1 & y_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ を (x_0, y_0z_0) と対応させることにすると、この２つの写像は同じものといってもいいと思います．

A：そうだね．だから，この宿題３の結論としては，xy-平行移動による「持ち上げ」という写像は，上のような３次正方行列の積と式が一致していることを確認したということでいいんだよ．

O：それでいいということならいいのですが，しかし，モヤモヤが残ります．まず,「持ち上げ」の意味から分かりたいと思います．そのうえで，前半でどうしてあのような計算をするのかをわかりたいです．

A：まず，宿題１では，yz-平面上の一輪車の動き $(y(t), z(t))$ に対して，$x(t) = \tan\theta(t)$ と決めた．このことから，$y(t)$ と $z(t)$ が決まれば,「一輪車の向き」という観点で $x(t)$ が決まることになる．ここまではいいかな．

O：はい．これはまだわかります．そのあと，急に xy-平面になるところがわからないのです．

A：いや，特に理由があるわけではないと思うのだけれど,「$y(t), z(t)$ から $x(t)$ が決まって，これを一輪車空間における直線であると定める」という枠組みがあるとして，これを $x(t), y(t)$ がわかっているときに，一輪車空間における直線になるように $z(t)$ を決めることができるか，という問題を考えてみたらどうだろう．

O：これはどういう感じかというと，y 軸方向の移動の方法がわかっていて，かつ一輪車の向きが $x(t)$ でわかっていたとするときに，z 軸方向の移動の方法が再現できるか，という理解でいいでしょうか．

A：それでいいと思うよ．$x(t), y(t)$ が勝手に動く場合は難しいかもしれないから，とりあえずは $x(t), y(t)$ が線分の上を動く場合を考えたのが宿題２なのだね．

O：それは何となくわかります．$x(t) = \dfrac{z'(t)}{y'(t)}$ という等式がありましたから，$x(t), y(t)$ がわかれば，$z'(t)$ に関する方程式になりますよね．それを積分で $z(t)$ を求めればいいのかなと思いました．

A：そういう理解でいいと思うよ．

O：それで宿題３に来たわけですが $\cdots$ $x = 0, y = 0$, $z(1) = z_1$, $z(0) = \tilde{z}$ とする，という作為的な式の立て方の意味がどうにも分かりません．

A：この式の意味だね．要は，(x_0, y_0, z_0) を起点として，$x(t), y(t)$ が線分の上を動くとして，この点を (x_1, y_1, z_1) だけ平行移動したい．ということなのだけれども，z_0 がすんなり $z_0 + z_1$ になるわけはないので，少し補正が必要だということだと考えられるかな．

O：補正ですか．それで $x = y = 0$ の場合を考えるということですね．

A：そういうことだね．$x = y = 0$ の場合で，「ゴールとなる $z(1)$ が z_1 に等しくなるための，始点 $z(0)$ はどこかな，という問題をまず考えている．そうして $z(0) = z_1 - \frac{x_1 y_1}{2}$ とおけば，$z(1) = z_1$ になる，という計算を得たわけだ．

O：これが z 軸方向 z_1 平行移動のための「補正」ということですね．

A：うん．そのうえで，今度は始点を $x_0, y_0, z_0 + \tilde{z}$ にすれば，「(x_1, y_1, z_1) だけ平行移動」に相当する状況がつくれたと，そういう風に見なしているわけだ．

（第１１章宿題４）　ハイゼンベルグ群 G の中心 $C(G) = \{h \in G | \forall g \in G, hg = gh\}$ は $\mathbb{R}$ と同型であることを示せ．このことからハイゼンベルグ群は「１位のべき零 (nilpotent) 群」である．半一輪車空間が Nilgeometry と呼ばれるゆえんはここにある．

A：群 G は

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

と表示されている．$C(G)$ を「群の中心」であるとする．

O：中心ですか $\cdots$

A：定義はこれ

$$C(G) = \{h \in G | \forall g \in G, hg = gh\}$$

O：どういうことですか．

A：定義式どおりに説明すると,「h がどの要素とも交換可能であるとき，h を中心 $C(G)$ の要素であるという」ということ.

O：これは群論では大切なことなんでしょうか.

A：うん．群論では，任意の要素が交換可能 $gh = hg$ であるとき，可換群（アーベル群）であるといって，可換群はどういう種類があるかすっかりわかってしまっているんだね．とすると，可換群でない群，つまり交換可能でない要素があるような群，これを非可換群というけれど，それが可換群とどのくらい近いか，ということは群を分類したり性質を考えたりするときには重要なんだ.

このことから，中心 $C(G)$ というものを考えて，それが G の中でどのくらい大きな部分を占めているかを調べることは興味の１つだと言える．しかも，宿題４の問題文中にあるように，$C(G)$ が $\mathbb{R}$ と同型な群であるとき，一位のべき零群である，というんだね．Nilpotent という言葉とも結びつく重要な性質だ.

O：ではそのことを検証していきましょう.

A：$h \in C(G)$ を任意に取るとして，この h が具体的に行列でどのような条件を満たす式であるかを計算してみればいいね.

O：ある実数 x_h, y_h, z_h があって $h \in C(G)$ は

$$h = \begin{pmatrix} 1 & x_h & z_h \\ 0 & 1 & y_h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表されるとしていいですか.

A：そうだね.

O：任意の $g \in G$ を $g = \begin{pmatrix} 1 & x_g & z_g \\ 0 & 1 & y_g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表しておいて、$hg = gf$ が任意の x_g, y_g, z_g について成り立つ条件を求めてみます.

$$hg = \begin{pmatrix} 1 & x_h + x_g & z_h + z_g + x_h y_g \\ 0 & 1 & y_h + y_g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$gh = \begin{pmatrix} 1 & x_g + x_h & z_g + z_h + x_g y_h \\ 0 & 1 & y_g + y_h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、かつ $hg = gh$ が成り立つといっているのですから，行列の成分を比較して「任意の x_g, y_g について $x_h y_g = x_g y_h$ が成り立つ」ことが必要十分条件であることがわかります．

A：いいと思うよ．

O：このことから $x_h = y_h = 0$ がわかります．と，言ってしまっていいですよね．

A：大丈夫だけど，少し不安があるかな？

O：はい．x_g, y_g は任意だと言っていることから，たとえば $x_g = 0, y_g = 1$ のときにも式 $x_h y_g = x_g y_h$ は正しいことになり，それぞれ代入して $x_h = 0$ を得ます．$y_h = 0$ も似た方法で示せます．これでいいですよね？

A：はい．「任意の x_g, y_g について」と言っているので，x_g, y_g という文字変数に関して恒等式になっていると考えてもよいね．そう考えたならば，係数が 0 であることから $x_h = y_h = 0$ が導かれることになる．

O：そういう考え方もあるのですね．

A：そうすると，h はどういう形の行列になるかな,．

O：$h \in C(G)$ は

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、自由に動かせる値は z_h の 1 つとなりますから，これは実数 $\mathbb{R}$ と同型な群になるといえます．これでいいですか．

A：だいたいいいけど少し足りないね．

O：え，そうでしょうか．

A：うん．$C(G)$ の要素を二つ用意して，それらの（行列の）積をとるとどうなるかな．

O：はい，ではやってみます．一つは $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として，もう一つはどうしましょうか，$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ でいいですか．これらをかけると

$$hk = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_h + z_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．もちろんこれは $C(G)$ の要素であるわけですが，これで証明が完了しているんですか．

A：うん．同型であることが言えているのだが，きちんと説明できるかな．

O：自信ないです．

A：要するに，$h \rightleftarrows z_h, k \rightleftarrows z_k$ という対応を考えたところ，$hk \rightleftarrows z_h + z_k$ という対応が得られたということでしょう．

O：まぁ式をみればそういうことですね．hk のほうは掛け算で，$z_h + z_k$ のほうは足し算ですが，それでいいんですか．

A：いーんです．つまり群 G における演算は行列の積で定義されていて，実数群 $\mathbb{R}$ における演算は足し算で定義されているということだからね．

O：実数 $\mathbb{R}$ には掛け算もありますが，足し算のほうがいいのですか．

A：ああ，それは少し前もって言っておいたほうが良かったかも．ここは足し算で考えています．だって，そもそも，実数 $\mathbb{R}$ は掛け算について群にならないんだよね．

O：そうなんですか？

A：だって，0 の掛け算の逆元はないでしょう．

O：そういわれれば $\dfrac{1}{0}$ はありません．そういう理由で，実数は乗法群ではないんですね．

A：そういうこと．

（第１１章宿題５）　半一輪車空間は接触構造と深い関係がある．(宿題２) で得た半一輪車空間の直線 $(x(t), y(t), z(t))$ の速度ベクトルはいつでも $(0, x(t), -1)$

と直交していることを確認せよ．この性質をもつ空間曲線を「接触構造のルジャンドル曲線」という．

O：「確認せよ」と言われていますので，粛々と確認します．

A：そうしてください．

O：(宿題 2) より

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x + tx_1, y + ty_1, y_1\left(xt + \frac{x_1t^2}{2}\right) + z(0))$$

となって、速度ベクトルは

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (x_1, y_1, y_1(x + x_1t))$$

$(0, x(t), -1)$ と内積をとると

$$\begin{aligned}&(x'(t), y'(t), z'(t)) \cdot (0, x(t), -1)\\&= (x + tx_1)(y_1) - y_1(x + x_1t) = 0\end{aligned}$$

となり、直交が確認されます．うまい具合に項が消えますね。これでいいでしょうか．

A：OK.

O：これは，どういう意味なのでしょうか．

A：はい，これは接触構造というものだね．まず，接触ベクトル場について説明しよう．まず，ベクトル場は知っているかな．

O：多様体論で出てくるベクトル場ですか．

A：まぁそうなんだけど，今回はちょっと簡単なバージョンで理解することにするよ．まず，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ を考えよう．今は，それで十分だからね．

O：はい．座標は (x, y, z) ということでいいでしょうか．

A：大丈夫．ここで，3 次元空間の各点を始点とするベクトルを同時に考えよう．

O：同時 $\cdots$ ですか．どういう状況を思い浮かべるといいでしょうか．

A：たとえば,「風向き」などはどうかな．空間の各点で空気の動きを風として記述することにすると，各点を始点とするベクトルを考えていることになるよね．

O：なるほど $\cdots$．でもやっぱり，同時に，というのが少し不安です．例えば点 $(1, 2, 3)$ ではベクトル $(0, 0, 1)$ のように,「任意の点に着目するとその点にベクトルが決まっている」というのはなんとなく思い浮かべられるのですが,「すべての点で同時にベクトルが決まっている」という状況を思い浮かべるのは難しいです．

A：なるほど．そういう悩みもあるもんだね．でも,「任意の点に着目するとその点にベクトルが決まっている」ということと「各点で同時にベクトルが決まっている」ということは同じことだよ．一つ一つのベクトルを認識するか，ベクトルを同時に全部認識するかの違いだけだね．

O：そういうものでしょうか．

A：髪の毛はベクトル場，という話は聞いたことある？

O：何ですかそれ．

A：髪の毛と言っても髪を長く伸ばしている状況というよりは，短く刈り込んだ頭を思い浮かべてくれるかな．

O：スポーツ刈りくらいですか．

A：そうそう．そうすると，髪の毛の生えている頭皮には毛がびっしり生えているわけだけれども，この短い髪の毛をベクトルだと思うんだよ．

O：頭皮に直交している髪もそういう方向のベクトルと思うのですか．

A：そうだね．これは頭皮という曲面の各点にベクトルが決まっているという状況に極めて近い．

O：ああ，本当に頭皮の点全部のベクトルが見えているわけではありませんが，おおむねびっしりと毛が生えているわけですから，多くの点でベクトルがびっしり生えているという状況です．

A：「ベクトルが生えている」，いい表現だねぇ．これからそういう言い方をすることにしよう。

O：これがベクトル場のイメージだということで理解することにします．

A：まぁそういうこと．それでね，接触ベクトル場というのを「点 (x, y, z) におけるベクトルは $(0, x, -1)$ である」というベクトル場だとしよう．

O：これは？ベクトルの x 成分が 0 だと言っていますから，各点で yz 平面に平行なベクトルが決まっているわけですね．

A：そうだね．

O：それで，x 座標が増えれば増えるほどベクトルの傾きが増すという傾向が見て取れます．

A：図で示せればいいのだけれど，なかなか平面の絵に落とし込むとわかりにくいので，想像の感覚でとらえてもらえるといいんだけど,．

O：はっきりとしたイメージまではいきませんが,「yz 平面の方向で」「x 座標が増えれば増えるほどベクトルの傾きが増す」という雰囲気でとらえることにします．

A：そうしてください．そこでね，スポーツ刈りの話に戻るんだけど，ほら，スポーツ刈りの髪の毛って，頭皮に直交しているイメージあるじゃないですか．

O：はい．「毛が立っている」という感じですよね．

A：うん．それ．スポーツ刈りだと「頭皮という曲面」があって，「その曲面に垂直な方向にベクトルが生えている」という状況だよね．でも，この逆の問題を考えると意外と難しい．

O：逆，というとベクトル場が先にあって，そこから曲面を見つけるということでしょうか．

A：そういうこと．3 次元空間ベクトル場が先にあるときに，そのベクトル場にあらゆる点で直交しているような曲面をさがすのは意外と難しいんだ．

O：見つけ方があるというわけではないんでしょうか．

A：見つけ方はあるにはあるんだけれど，ある一定の条件が満たされていないと見つけられない，といった話もあるんでね．「ベクトル場に直交する曲面」では見つけられるとは限らないので「ベクトル場に直交する曲線」だったら見つけられるかも，というような話になるのは仕方ないんだ．

O：曲面だと見つけるのが難しいので曲線で我慢しようというわけですね．

A：うん．それで，さっきの接触ベクトル場に直交するような曲線（改めて確認するけれど，曲線上の各点で曲線とベクトル場のベクトルが直交しているという意味だからね）のことを特に「ルジャンドル曲線」と言ったりして，これはこれで研究対象になっていたりするんだ．

O：へえ．そうなんですか．それで，ここまでやってきたように，x, y 平面の線分の持ち上げはそのルジャンドル曲線になっているということが今回の宿題の課題だったわけですね．

A：そのとおり．もっと言うとね，今回の宿題の割と最初のほうに $x(t) = \dfrac{z'(t)}{y'(t)}$ という式があったと思うけれど，これは

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) \cdot (0, x(t), -1) = x(t)y'(t) - z'(t) = 0$$

という式からもわかる通り，ルジャンドル曲線であることの必要十分条件なんだよね．と，いうわけで，一輪車空間から曲線の持ち上げ，行列表示によるハイゼンベルグ群，そしてルジャンドル曲線と来て，ぐるりと回って話が戻ってくるというのがこの章のストーリなんだよね．

O：なるほど．いろいろな話がつながっていることがわかりました！