第１２章

（第１２章宿題１）　２次元球面幾何学で，内角が 120 度であるような正三角形を作図せよ．また，ねじれた三角柱から３成分のホップリンクを構成できることを確認せよ．

O：ふ，ふ，ふ，ふ．

A：どうしました．

O：これ，何となく答えだけわかったんです．ただし，作図せよ，と言われると答えられないですが．

A：それはずいぶん不思議な物言いですが，とにかく答えだけわかった，ということですね．

O：はい．

A：では，ご披露ください．

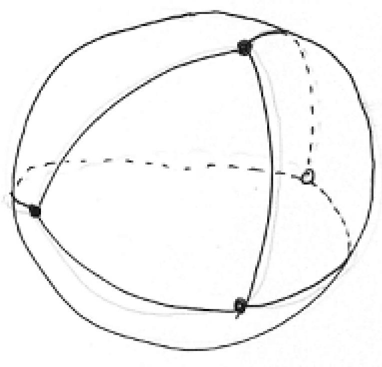
O：球面上に正 4 面体の頂点をプロットして、各頂点を大円弧で結べば得られるような気がするのですがどうでしょうか．

A：…おおっ！ なるほど！すばらしい発想ですね．出来上がった球面上の三角形が正三角形であるのはなぜですか．

O：それは，正四面体の頂点をプロットしたのですから，一つ一つの面は三角形であることは明らかですし，この三角形の三つの辺の長さが等しいことも，正四面体のであることから直ちにわかると思いました．

A：内角が 120 度であるのはなぜわかりますか．

O：そこが，ちょっと自慢のところなのですが，正 4 面体の頂点を球の上にとったとして，それらを大円弧で結んだ絵を思い浮かべたんです（図 12-1）．そうしたら，各々の頂点の周りに辺が 3 本あることに気が付いたのです．



A：なるほど．少し話の筋が見えてきました．

O：最後まで話させてください．頂点の周りに辺が三本あるということは，360 度が 3 等分されて，一つの角が 120 度だとひらめいたのです．

A：それはよい発見でした．正解ですね．

O：でも，作図できません．

A：そうですか．では計算で求めてしまいましょう．球面 S^2 の 4 点が正四面体の頂点になっているような座標を求めればいいわけです．

O：そうですね．四面体の置く場所はいろいろありうると思うのですがどうするのがいいですか．

A：たしかにいろいろありますが，頂点の一つを北極 $(0,0,1)$ に置くのがいいと思います．

O：そうか．そうすると，あと残りの三つの頂点は同じ高さになりそうですね．

A：そうなんだよ．では式を立ててみてくれますか．

O：はい.（少し考える.）残りの三つの頂点のうちの一つは xz 平面にあると仮定してもよさそうですね．というわけで，$(a,0,c)$ と置きます．そうすると，z 軸を軸として 120 度回転する回転変換をすればほかの頂点の座標を求めることができると思います．

A：調子いいね．

O：と，いうわけで，$(a\cos 120°, a\sin 120°, c)$ と $(a\cos 240°, a\sin 240°, c)$ ですね．

A：あ，まぁ，π とか使ってほしかったけれど ⋯．まぁいいか．続けて．

O：あ，すみません．で，この 4 つの頂点の間の距離がどれも一定ですから ⋯（筆算を始める.）

$$a^2 + (c-1)^2 = (a - a\cos 120°)^2 + (a\sin 120°)^2$$

と，この等式だけが残りますね．ほかにもいろいろ式は立ちますが，どれもこれと同じことになります．

$$a^2 + c^2 - 2c + 1 = 3a^2$$
$$2a^2 = c^2 - 2c + 1$$

ですね．あともう一つ式がほしいところですが ⋯ あ，そうか $(a,0,c)$ は球面上

の点だから $a^2+c^2=1$ ですね．この式で a^2 を消すことができます．

$$3c^2-2c-1=0$$
$$c=-\frac{1}{3},1$$

形を見ると $c=1$ はあり得ませんから，$c=-\frac{1}{3}$ で，$(a,0,c)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$ でいいでしょうか．

A：計算は良さそうだね．

O：z 座標の c が意外ときれいな式の形で驚きました．

A：そお？ だって，この正四面体の重心は原点と一致するから，北極にある頂点から対する面の重心とを結ぶとこれは z 軸に一致しなければいけなくて，あとは，4 面体の重心が $3:1$ の内分点になること知っていれば $3:1=1:\frac{1}{3}$ であっという間に求まると思うけどね．

O：やられました！ 気が付けば一瞬ですね．

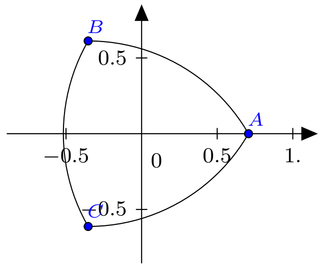
A：さて，それでこのように求まった頂点を立体射影で球面幾何学の平面モデルへ移してみよう．

O：あ，そうですね．やってみます．立体射影は $(x,y,z)\mapsto\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$ ですから，$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},0,-\frac{1}{3}\right)\mapsto\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ ですね．ほかの二つの底面の頂点はこれを 120 度，240 度原点中心で回転させたものですから，

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

と求まります．

A：おお．それでよいようだね．作図ソフトを使って図を描いてみるとこうなるね．(図 12-1-b)



O：おや，ルーローの三角形ではないですか？これは．

A：おお，よく知ってるね．

O：こういう形のお掃除ロボットが家にあるんです．

A：さて，ではこの球面幾何学の平面モデルの上に書かれた正三角形をもとにして，3 回ねじれ 3 角柱を作れば，これが求める展開図であるということになります．

（第１２章宿題２）　「原点を原点に写し，空間の向きを裏返さない $\mathbb{R}^3$ の合同変換全体の集合」を $SO(3)$ と書くことにすると，

$$SO(3) = \{A : 3 \times 3 \text{ 実行列} \mid {}^t\!AA = I,\ |A| = 1\}$$

であることを示せ．これは特殊直交群と呼ばれる群である．$\mathbb{R}^3$ 内の原点中心の単位球面 S^2 に対して，S^2 を裏返すことなく自分自身に重ねて置く置き方全体の集合 (つまりビーチボール宇宙) は $SO(3)$ と同型な群であることを示せ．(群の同型＝変換の合成を行列の積に移すような全単射対応）

O：これは難しいです.「原点を原点に写し，空間の向きを裏返さない $\mathbb{R}^3$ の合同変換全体の集合」という言葉の意味は何となく分かるのですが，それをどのように数学の言葉に直していくのかが見当もつかないです．

A：そうだね．本格的な線形代数の知識が必要になるよ．少し予習をしておいてくれるかな．

O：どのあたりでしょうか．

A：直交変換とかそのあたりかな．

O：直交行列は等長的である，という定理のあたりですか．

A：あ，そうそうそういうところ．

O：わかりました．予習，いや一度僕は習っているはずなので復習ということになりますか．勉強しておきます．

A：はい，ではよろしく．

（後日）

O：はい，直交行列の定義が ${}^t\!AA = I$ だということと，直交行列は内積 (u, v) やノルム $|u|$ に関して $(u, v) = (Au, Av)$ や $|u| = |Au|$ が成り立つことは思い出しました．ほかには何か必要ですか．

A：うん．そのあたりでいいけど．あとは，正規直交基底は覚えていますか．

O：ええまぁ，だいたいは．基底であって，基底に属するベクトルがお互いに直交しており，かつ長さが 1 であるようなものをいうのだと記憶しています．

A：正確ですね．それで大丈夫です．では内容を一つ一つ確認しながら始めましょう．

O：「原点を原点に写し，空間の向きを裏返さない $\mathbb{R}^3$ の合同変換」と言っています．3 次正方行列が ${}^t\!AA = I$ を満たすならばベクトルの長さが保たれるということで，ベクトルの長さが保たれれば合同変換なのかな，とおもいますが，そういうストーリでいいのでしょうか．

A：うーん．直交行列から得られる 1 次変換が合同変換であることの説明はそういうことだと思うよ．

O：その「うーん」というのはどういうニュアンスなのでしょうか．

A：わかりやすくするために記号を導入しましょう．つまりね,「直交行列」という集合を A として,「長さを保つ 1 次変換」という集合を B として「原点を原点に写し，$\mathbb{R}^3$ の合同変換」という集合を C としましょう．空間の向きがどうのこうのという話もついてまわりますが，これは後で議論することにして，まずはこの 3 つの集合 A, B, C について考えます．

O：はい，そうやって整理してもらえるとわかりやすそうです．

A：それで，O 君が「3 次正方行列が ${}^t\!AA = I$ を満たすならばベクトルの長さが保たれる」ことを指摘してくれたわけだけれど，これは「A から B への対応がつく」ということなんだよね．

O：${}^t\!AA = I$ は直交行列ということで集合 A，ベクトルの長さが保たれるということが集合 B だということですね．

A：そうそう．ちなみに,「B から A への対応がつく」ということも線形代数の問題なので解決しておこうか．

O：あ，はい．つまり「$|u| = |Au|$ が成り立つならば ${}^t\!AA = I$ ということですね．

A：うん．証明を追ったことはあるかな．

O：はい．練習問題で証明を書いてみたことがあります．$|u| = |Au|$ から直接に ${}^t\!AA = I$ を導くことは難しいので，いったん $(u, v) = (Au, Av)$ を証明するという道筋でした．ここに書いてもいいですか．

A：はい．お願いします．

O：まず，任意の u について $|u| = |Au|$ が成り立つことを仮定して，$|u+v|^2 - |Au + Av|^2 = 0$ を計算する，というトリックがあって，僕はこれが好きなんですよ．

A:あーなるほど，そういう始め方もあるんですね．ここでは $A(u+v) = Au+Av$

だということがポイントなんですよ．

O：はい．そのあとは計算で一本道です．

$$\begin{aligned} 0 &= |u+v|^2 - |Au+Av|^2 \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2(u,v) - |Au|^2 - |Av|^2 - 2(Au,Av) \\ &= 2(u,v) - 2(Au,Av) \end{aligned}$$

A：それでいいですね．では「$(u,v) = (Au,Av)$ ならば ${}^tAA = I$」をどうぞ．

O：これは，一般的な公式として $(Xu,v) = (u, {}^tXv)$ というのがあるので，$(u,v) = (Au,Av)$ からただちに $(u,v) = (u, {}^tAAv)$ ですが，この式が任意の u,v について成り立つことから ${}^tAA = I$ です．

A：そうだね.「B ならば A」はこれで解決したね．さて，この宿題の本筋は何かということなんだけれど，集合 C と集合 A との対応が付くかどうかを調べよ，ということなんだよ．

O：そういうことですか．あ，でも，A から C は簡単ではないでしょうか．

A：うん実はそうなんだ．説明できるかな．

O：やってみます．行列 A が直交行列だと仮定したときに「原点を原点に写し，$\mathbb{R}^3$ の合同変換」であることを言えばいいわけですが，まず，行列による変換なので，原点に移すことは $A0 = 0$ であることから正しいことが示せます．$\mathbb{R}^3$ の合同変換であることを示すには，任意の $\mathbb{R}^3$ 内の線分の長さが変わらないことを言えばいいと思いますが，それはその線分をベクトルと思って u とおいたときに $|u| = |Au|$ が成り立つことから言えると思います．

A：それでいいね．

O：最後にのこるのが集合 C から集合 A への対応ですが，これも難しくないように感じました．線形代数の教科書を読むと，ベクトルの長さが保たれるような 1 次変換は直交行列に限る，と書いてあるので，それでいいのではないですか．つまり集合 B から集合 A への対応と同じことなのですが．

A：「1 次変換」ならね．

O：違うんですか．

A：結論としては「1 次変換」なのだけれど，仮定にはただ「変換」とだけ言っているので,「原点を原点に写すような $\mathbb{R}^3$ の合同変換」が一次変換であることをまず証明しなければいけないよ．

O：えー．それは線形代数の問題ですか．

A：いいや，幾何学の問題としてだね．

O：さて，どうしましょう．

A：「原点を原点に写すような」と言っているので，平行移動のような変換は含まれないことを押さえておきたいね．

O：なるほど．原点を動かせないので，回転のような変換になるわけですね．

A：そう．そのことをはっきりさせるために，基本単位行列を e_1, e_2, e_3 とおくことにする．

O：これは？$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ ということですか．

A：そういうこと． それで，求めるような「原点を原点に写すような合同変換」ϕ を考えると、次の命題が得られる．

(1) 基本単位行列の始点は原点であるので、$\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, $\phi(e_3)$ の始点も原点である．

(2) ϕ は合同変換であることから、空間の長さを変えない．したがって、$\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, $\phi(e_3)$ の長さは 1 のままである．

(3) ϕ は合同変換であることから、ベクトルのなす角度を変えない．したがって、$\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, $\phi(e_3)$ は互いに直交する．

この 3 つの条件はいいかな．

O：はい．わかります．なんとなく正規直交基底の香りがしてきましたが．

A：そうだね，でもそこまでに重要なステップがまだ残っているからちょっと先走らないでね．

O：1 次変換であることを示すことが先ですね．

A：そういうこと．

O：でも，ϕ は「普通の写像」なんですよね．これが「1 次変換」であることを示すのは相当ハードルが高いように思うのですが．

A：そうなんだけど，落ち着いてやれば大丈夫だから．まず，ϕ が 1 次変換であることの必要十分条件は何かな．

O：いろいろあり得ますが．ベクトル u, v に対して $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$ であり，かつベクトル v と実数 a に対して $\phi(av) = a\phi(v)$ であることです．

A：そうだね．でもここでは e_1, e_2, e_3 を使って表現してみよう．たとえばこういうのはどうかな．「任意の実数 x, y, z に対して，$\phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\phi(e_1) + y\phi(e_2) + z\phi(e_3)$ が成り立つ」こと．

O：これはよさそうですね．要するに，基底 e_1, e_2, e_3 に関する線形和が基底 $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ の線形和に移るということですね．

A：そういうこと．これを次のような理屈で説明する．

O：お願いします．

A：ベクトル v を $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ とおいて $\phi(v)$ を考えるわけだが，ここでベクトルが表す位置（位置ベクトルとしたときの座標）で，原点 $O = (0,0,0)$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $v = (x,y,z)$ を考える．これはいいね．

O：はい．5 つの点の座標を具体的に書いてみたということですね．

A：うん．そこで，点 v と，ほかの 4 点 $0, e_1, e_2, e_3$ との距離を考えることをする．これを文字変数で a, b, c, d で表すことにする．

O：ベクトルの言葉に戻すと $|v-0| = a$, $|v-e_1| = b$, $|v-e_2| = c$, $|v-e_3| = d$ ということですね．

A：そうなるね．ではここで小さな問題を考えよう．空間上のベクトル p が $|p-0| = a$, $|p-e_1| = b$, $|p-e_2| = c$, $|p-e_3| = d$ を満たすとしたとき，$p = v$ であることが主張できるだろうか？

O：うーん．これはできると思いますね．というのは，$|p-e_1| = b$, $|p-e_2| = c$, $|p-e_3| = d$ だけに着目すると，４点 p, e_1, e_2, e_3 を頂点とする 4 面体と，４点 v, e_1, e_2, e_3 を頂点とする 4 面体が合同だということになります．これだけだと，p の可能性がまだ 2 通りあると思いますが，もう一つ $|p| = a = |v|$ という条件がありますので，$p = v$ でなければいけません．

A：そうだね．ここで補足しておくと，４点 $0, e_1, e_2, e_3$ が同一平面上にないということを本質的に使っています．実際に方程式を立てて $p = v$ を検証することも可能だね．

O：それで，次にはどうするのですか．

A：次は同じ議論を $0, \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ で考えます．ϕ が合同変換であることから $|\phi(v)-0| = a$, $|\phi(v)-\phi(e_1)| = b$, $|\phi(v)-\phi(e_2)| = c$, $|\phi(v)-\phi(e_3)| = d$ が言えるわけだけど，空間上のベクトル p が $|p-0| = a$, $|p-\phi(e_1)| = b$, $|p-\phi(e_2)| = c$, $|p-\phi(e_3)| = d$ を満たすとしたとき，$p = \phi(v)$ であることが主張できることになるね．

O：それはまあ，寸前の話と同じ理屈でそうなりますね．

A:ふふふ．ところで，$v' = x\phi(e_1)+y\phi(e_2)+z\phi(e_3)$ とおくと，4 点 $0, \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ のそれぞれとの距離はどうなっているかな？

O：そんなのすぐにわかりますか？計算できるとも思えませんし．だって，ϕ は 1 次変換だという仮定はないんですよね？あれば計算できますけど．

A：ところがね，前で確認したように,「$\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ の長さは 1 である」

ということと「$\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ は互いに直交する」ということが言えているんだよね．

O：あ，もしかして，そうすると，$0, e_1, e_2, e_3, xe_1+ye_2+ze_3$ の 5 点が作る図形と $0, \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3), x\phi(e_1)+y\phi(e_2)+z\phi(e_3)$ が作る図形とは合同であって，したがって，$v' = x\phi(e_1)+y\phi(e_2)+z\phi(e_3)$ にたいしても 4 点 $0, \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ のとの距離はそれぞれ a, b, c, d だということになりますね．

A：そうなんだよ．そのことから，直ちに $v' = x\phi(e_1)+y\phi(e_2)+z\phi(e_3) = \phi(v)$ が言えるね．

O：このことは $\phi(xe_1+ye_2+ze_3) = x\phi(e_1)+y\phi(e_2)+z\phi(e_3)$ を意味しますので，つまり結論が示されたわけですね．はあ，長いなぁ．

A：長かったね．でもこれで集合 C から集合 A への対応がつきました．

O：あとは，空間の向きがどうのこうのということですが．

A：ここの説明は簡単に済まそうと思うけれど，これは行列で与えた 1 次変換の性質から直ちに導けると考えていいと思うよ．

O：それは教科書で読んだことがあります．行列 A の行列式 $|A|$ が正のとき，またそのときに限り A の表す 1 次変換は空間の向きを保つということでした．

A：うん．それ．だから集合 C のほうで「空間の向きを保つ変換」だと言っていることは，集合 A のほうでは「行列式 $|A|$ が正だ」ということに対応するんだよね．

O：$SO(3)$ の定義式では $|A| = 1$ となっていましたが？

A：それはね，直交行列の定義式 ${}^t\!AA = I$ から $|A| = \pm 1$ が導出できるからね．これは簡単な計算問題だよ．

O：ああ，そういう練習問題があったように記憶しています．だから，$|A|$ が正ならば 1 しか可能性はないのですね．わかりました．

A：あとは，ビーチボールとの関係だけど，これはこれまでの議論を踏まえれば簡単だと思うよ．

O：$SO(3)$ の要素 A に対しては，原点を動かさないような合同変換であることがわかっていますから，ビーチボールを回転させるような変換になって，本文の言い方を借りればビーチボールを自分自身に重ねるような置き方だということになります．以上より、$SO(3)$ の要素 ϕ は、ビーチボール宇宙の要素であることがわかります．

A：そうだね．逆に、ビーチボール宇宙の要素 T を考えると，これが $SO(3)$ の 1 次変換になることはいえるかな．

O：ビーチボール宇宙の要素 T を考えます．これは S^2 を自分自身に重ねるような置き方である．何となくですが，上の e_1, e_2, e_3 を使えばいいような気がします．ビーチボールの半径は 1 としてよいとおもいますので，上の e_1, e_2, e_3 はビーチボールの上にある点ですよね．

A：うん．それは筋がいいので，そのまま続けてください．

O：ビーチボールの上に前もって e_1, e_2, e_3 の 3 つの終点をマーキングしておくと、自分自身に重ねる置き方をすることにより、e_1, e_2, e_3 の 3 つの終点もどこか S^2 の点に移るということでいいでしょうか．

A：いいねぇ．

O：調子でてきました．この「行先」を順に e_1', e_2', e_3' であることにする．このとき、R^3 の線形変換であって、e_1, e_2, e_3 をそれぞれ e_1', e_2', e_3' に移すようなものが存在する．それを ψ とします．そういうものが存在するとして構いませんよね？

A：線形代数の性質から OK ですよ．

O：そうすると，ビーチボールを動かしたということから，「e_1', e_2', e_3' の長さはどれも 1」であって，「e_1', e_2', e_3' はお互いに直交しあう」ことも自動的にいえていると思います．ああ，そうすると，の線形変換は直交行列で表せているということですね．

A：はい，それでいいね．

O：直交長列は合同変換ですから，「S^2 を自分自身に重ねるような置き方」である T に対して、$SO(3)$ の要素 ψ が対応していることがわかりました．

A：ビーチボール宇宙と $SO(3)$ が（群として）同型であることを示すには「移動の変換の合成」と「$SO(3)$ の行列の積」とがつじつまが合っていることを示せばよいが、これは省略しよう．

O：ホント長かったです．どうもありがとうございました．

（第１２章宿題３）　特殊ユニタリ群 $SU(2)$ を

$$SU(2) = \{A : 2 \times 2 \text{ 複素行列 } | A^*A = I,\ |A| = 1\}$$

により定めるとき，$\mathbb{C}^2$ 内の単位 3 球面 S^3 との間に同相写像が定められることを示せ．(同相＝双方向連続な全単射対応.)

O：この章の宿題は難問ぞろいで手が付けられません．

A：そうかもね．こういう話はリー群に関する教科書（例えば，井ノ口順一著「はじめて学ぶリー群—線形代数から始めよう」(現代数学社)）に書いてあることなので，参照してほしいね．

O：まず $\mathbb{C}^2$ について確認させてください．ここでの単位球面の意味がわかりません．

A：$\mathbb{C}^2$ とは

$$\{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

のことで、これは $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \mid x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$ と対応しているものです．

O：はあ，4 次元線形空間ですね．ベクトルの長さとかはいつもと同じように考えて大丈夫でしょうか．

A：大丈夫だね．$\mathbb{R}^4$ でのベクトルの長さは $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$ でいいね．それで，$\mathbb{R}^4$ と $\mathbb{C}^2$ との対応についてだけれども，$z_1 = x_1 + \sqrt{-1}y_1, z_2 = x_2 + \sqrt{-1}y_2$ とおきなおして、$(x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2) \mapsto (x_1, y_1, x_2, y_2)$ という対応で全単射が作れています．

O：複素数 $\mathbb{C}$ の集合を複素数平面で考えると，座標平面 $\mathbb{R}^2$ と対応できる話とおなじですね．

A：その話を思い出せれば，理解は容易だと思います．

O：$\mathbb{C}^2$ の要素は複素数に関するベクトル空間であると考えることができると思いますが，ベクトルの長さはどうなっていますか．

A：複素数に関するベクトル空間では長さは決まっていて，$\mathbb{C}^2$ においてのベクトルの長さは $\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ となっています．ちょっと考えると，これは $\mathbb{R}^4$ でのベクトルの長さと一致しているけれど，わかりますか．

O：わかると思います． $|z_1|^2 + |z_2|^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2)$ という式から導けると思います．

A：OK．では次に行こう．$\mathbb{C}^2$ 内の単位 3 球面 S^3 とは

$$\left\{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}$$

のことだよ.（単位球面とは「ベクトルのノルムが 1 であるようなベクトル全体の集合」の意味であるととらえればいいね.）

$SU(2)$ の要素は $2 * 2$ の複素数を成分とする行列であることから、$\mathbb{C}^2$ の要素

であるベクトルを $\mathbb{C}^2$ の要素へと移す.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

という対応になるね．これは普通の 1 次変換の式だから大丈夫だね.

O：はい．ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta, z_1, z_2$ はどれも複素数ですね.

A：そうそう．A を $2 * 2$ の複素数を成分とする行列としたとき、これが $SU(2)$ の要素であるための必要十分条件は「$A^*A = I,\ |A| = 1$」であるが、この細かい意味は線形代数の教科書に譲ることにして，ここでは式の定義をきちんと追っていくことにしよう.

O：はい.

A：$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とするとき、A^* は随伴行列と呼ばれる行列で、具体的には $A^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$ がその定義だね．これは大丈夫？

O：はい，何とか覚えています.

A：$A^*A = I$ という等式を立てて、α, β について解いてみてもらえるかな.

O：計算ですね．よし．やってみましょう.

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma & \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta \\ \bar{\beta}\alpha + \bar{\delta}\gamma & \bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このことから

$$\bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma = 1 \tag{1}$$

$$\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta = 0 \tag{2}$$

$$\bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta = 1 \tag{3}$$

が成り立ちます．ここまではいいですか.

A：大丈夫だと思うよ.

O：$|A| = 1$ を立式すると、

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{4}$$

です．(4) より

$$\delta = \frac{1+\beta\gamma}{\alpha} \tag{5}$$

(2) に代入して $\bar{\alpha}\alpha\beta + \bar{\gamma}(1+\beta\gamma) = 0$

これに (1) を代入して $\bar{\alpha}\alpha\beta + \bar{\gamma} + \beta(1-\bar{\alpha}\alpha) = 0$ で，

整理して $\gamma = -\bar{\beta}$．これを (5) に代入して $\delta = \dfrac{1+\beta(-\bar{\beta})}{\alpha}$ です．

整理して $\delta = \dfrac{\bar{\delta}\delta}{\alpha}$．さらに整理して $\delta = \bar{\alpha}$．これを (4) に代入して $\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta} = 1$ つまり $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$．こんなところでしょうか．

A：うん．$\alpha = 0$ の場合は別計算になると思うけれど，そういうところはあとで計算しておいてね．

O：はい，ともかく，まとめると $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$ となります！$SU(2)$ が解けました．

A：α, β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす複素数だから

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

と同じ式で定義されていると思える．具体的には (α, β) と (z_1, z_2) を対応させるようにすればよいね．

O：なーるほど．$\mathbb{C}^2$ の座標をそのまま置き換えているだけなので，そのまま同相写像なのですね．

（第１２章宿題４）　$SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面 S^2 へ合同変換として作用する． $SU(2)$ は複素数平面 $\mathbb{C}$ へ一次分数変換により合同変換として作用する．S^2 と $\mathbb{C}$ とは立体射影 $(x, y, z) \mapsto (x+yi)/(1-z)$ により幾何として（ほぼ）同一視できる．この観点から細かく調べて，$SU(2)$ と $SO(3)$ との間に連続な $2:1$ 対応があることを示せ．このことから $SO(3)$ もまた $SU(2) \simeq S^3$ と同じように Spherical な空間であると言える．

O：宿題３により $SU(2)$ の要素は $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ という式で与えられることがわかっています．ただしここで $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ という関係式があります．

A：そうだね，まずは一次分変換について確認しよう．ギリシャ文字の ζ を変数として，この $SU(2)$ の要素を一次分数式で表すことにするよ．$\eta = f(\zeta)$ とい

う形で表すと

$$\eta = \frac{\alpha\zeta + \beta}{-\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha}}$$

と書ける．

O : ζ？これは何と読むのですか．ギリシャ文字は覚えにくいのでイヤです．

A : η はエータまたはイータ．ζ はゼータ．

O : 宿題の問題文には，$SU(2)$ の一次分数変換が合同変換だ，と断言していますけれども，そのあたりから考えたほうがよさそうに思います．球面の合同変換を，立体射影で平面に置き換えたとき，平面上のどのような変換が球面の合同変換に相当するのか？という問題です．

A : そこのところはしれっとスルーしてもいいと思うよ．本来なら，合同変換を議論するときには空間の計量から話を持っていくのが本筋なんだがなぁ．つまりね,「合同変換＝計量を保存する変換」ということなんだ．今の場合で説明すると，球面に球面計量という計量がもともと入っていると考えて，立体射影を通じて球面計量を複素数平面 $\mathbb{C}$ へと移した induced metric と呼ばれる計量を計算し，$SU(2)$ がこの新しい計量を保存するかどうかを検算しなければいけない．

O : 幾何学の教科書でそういう計量の話を何度か見ましたが，いまのところは難しくてついていけません．

A : 計量は少しハードル高いかもしれないけれど，でも難しいと思うのは単なる思い込みだと思うけどね．まあでも今回は，計量の計算はパスして直感的に納得がいく方法で検証してみようか．

O : はい，でもどのようにするのでしょうか．距離と角度が保たれれば合同という方向でいくんですか．

A : うん．実は一次分数変換は「複素数平面上の角度を保つ変換」ということは知られている．証明はしないけれど．

O : じゃあ長さが保たれることを示せればよいですか？ああ，長さがわかるには，そもそも球面幾何の平面モデルの球面直線が引けないといけないですから，まずは球面直線が球面直線に移されることを示せればいいのではないでしょうか？

A : 思わずヒットだね．つまり球面上でいえば，大円が大円に移されることを示そうということだね．このことは意外と重要なんだ．球面幾何の平面モデル上の三角形があったとして，それを「球面直線が球面直線に移される，かつ角度を保つ変換」で移すと,（角度が保たれることから）同じ形の球面三角形に移されることが示せる．つまり，球面直線が球面直線に移されるような一次分数変換が求

められれば，それで合同変換であることが保証されると考えてよい．そういう方針でいってみようか．

O：そういうもんなのですか．

A：ユークリッド幾何学と違って，球面幾何や双曲幾何では「三角形の三つの角度が等しければ合同」という性質があるからね．

O：なるほど．

A：球面直線を複素座標で書くとどうなるかな．

O：中心 (a, b) 半径 r の平面上の円が「平面モデルの球面直線」である必要十分条件は $r^2 - a^2 - b^2 = 1$ だったように記憶しています．

A：そうだね．今度は中心が複素数で与えられる場合をかんがえるから，$a + b\sqrt{-1} = \omega$ とおけば，$r^2 - |\omega|^2 = 1$ というのが球面直線になるための必要十分条件ということになるね．

O：では中心 ω 半径 r の円 $|\eta - \omega|^2 = r^2$ を考えます．

A：これは複素数平面の円の方程式だね．

O：はい．ではこの η に $\eta = \dfrac{\alpha\zeta + \beta}{-\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha}}$ を代入して ζ の式にしたいと思います．

A:ちょっとその前に，$r^2 - |\omega|^2 = 1$ という条件の下で，円の方程式 $|\eta - \omega|^2 = r^2$ がどういう形になるかをまず計算してくれるかな．

O：はい

$$
\begin{aligned}
&|\eta - \omega|^2 = r^2 \\
&(\eta - \omega)(\bar{\eta} - \bar{\omega}) = 1 + \omega\bar{\omega} \\
&|\eta|^2 + \bar{\omega}\eta - \omega\bar{\eta} + \omega\bar{\omega} = 1 + \omega\bar{\omega} \\
&|\eta|^2 + \bar{\omega}\eta - \omega\bar{\eta} - 1 = 0
\end{aligned}
$$

です．なるほど．$|\eta|^2$ の係数を 1 にすると，定数項が -1 になるんですね．これは少し面白い性質です．

A：うん．

O：では，$\eta = \dfrac{\alpha\zeta + \beta}{-\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha}}$ を代入したいと思います．

$$
\begin{aligned}
&|\eta - \omega|^2 = r^2 \\
&\left| \frac{\alpha\zeta + \beta}{-\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha}} - \omega \right|^2 = r^2
\end{aligned}
$$

ええと，分母を払います．結構計算が長くなりそうです．

A：計算の途中は省略していいや．全部ばらして ζ の式にしてくれますか．

O：はい，長い式ですが，

$$\begin{aligned}&(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}+\alpha\beta\bar{\omega}+\bar{\alpha}\bar{\beta}\omega)|\zeta|^2\\&+(2\alpha\bar{\beta}-\alpha^2\bar{\omega}+\bar{\beta}^2\omega)\zeta\\&+(2\bar{\alpha}\beta-\bar{\alpha}^2\omega+\beta^2\bar{\omega})\bar{\zeta}\\&-\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-\alpha\beta\bar{\omega}-\bar{\alpha}\bar{\beta}\omega=0\end{aligned}$$

となります．

A：結果はどうですか？

O：ああ，$|\zeta|^2$ の係数を 1 にすると，定数項が -1 になることが確認できますね．つまり，この一次分数変換で移した図形は球面直線であることが示されました．

A：$SU(2)$ から得られる一次分数変換は，球面幾何の平面モデルの合同を与えることがわかったわけだ．

O：ちなみになんですが，球面に $SO(3)$ が合同変換で作用するときには「北極」は多くの場合動きますよね．立体射影によって，球面の北極は平面の無限遠点へと移されますが，$SU(2)$ から得られる一次分数変換と無限遠点との兼ね合いはどうなのでしょうか．

A：いい質問だね．$\eta=(\alpha\zeta+\beta)/(-\bar{\beta}\zeta+\bar{\alpha})$ で $\lim_{\zeta\to\infty}$ を考えるとどうなるかな．

O：ええとこれは，複素数の極限ですが，実数の時のように計算して大丈夫でしょうか？

A：大丈夫．これは．

O：そういうことなら，極限は $-\alpha/\bar{\beta}$ かなと思います．

A：そうだね．つまり，球面に $SO(3)$ の合同変換で北極が別の点にうつるように，複素数平面上の $SU(2)$ の合同変換で無限遠点は $-\alpha/\bar{\beta}$ へと移るというわけだ．

O：ああ，なるほど．$SU(2)$ の合同変換のほうは無限遠点もふくめてうまくいっているのですね．あれ，でも「合同変換」なのに無限遠点とか移るのは大丈夫なんですか？

A：うん．大丈夫．だって，距離有限だもん．

O：どういうことですか？

A：球面 S^2 の上では，南極から北極までの距離は π だよね．

O：はい．そうです．

A：ということは，立体射影で平面モデルで考えている時，原点と無限遠点の距離はやはり π ということなんだよ．

O：あーそういうことですか．納得できました．さて，あとは $SU(2)$ と $SO(3)$ のあいだには連続な $3:2$ 対応があるということなんですが，これは全く想像がつきません．

A：$2:1$ ね．

O：ああそうでした．$SU(2)$ の要素 2 個に対して $SO(3)$ の要素が 1 つ対応する，というという組み合わせが想像つかないのです．

A：逆に言えば，$SU(2)$ のどの 2 つが組になるかがわかれば，すべて解決できるんだよね．

O：そうなんですか．すぐにわかりますか？

A：うーん．じゃあヒント $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を一次分数変換で表すとどうなるかな．

O：まず一応確認しておきますが，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は $\alpha = -1, \beta = 0$ とおけば $SU(2)$ の要素ですね．はい．では一次分数変換の形にします．

$$\eta = \frac{-1 \cdot \zeta + 0}{0 \cdot \zeta - 1} = \zeta$$

おや．これは？もしかして $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の時とおなじになりませんか．

A：なりますなります．だから？

O：えーと，すぐにはわかりませんが．

A：要は約分できるということなんだけど．

O：はっ．$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$ は行列として別の行列ですか？

A：だって成分が異なるからねぇ．一般論から言って，別の行列だね．

O：でも，一次分数変換にすると，約分が起こって同じ式になりますね．

A：その通り．

O：一次分数変換のほうは $SO(3)$ と一対一に対応するのですね．なるほど．$2:1$ と言っても，$SU(2)$ と一次分数変換のあいだに $2:1$ の対応があるのですね．わかりました．

A：一応宿題の中では「連続な」ということも要求しているけれど？

O：一次分数変換などの分数式で描けている式は連続であることに問題がないと思います．

A：そうだね．では解決だ！

（第１２章宿題５）　ビーチボールの中心の位置を変えない置き方は，何らかの直線を回転軸とした回転で表現されることを証明せよ．このことを数学的に言い換えると，任意の $SO(3)$ の要素は何らかの直線を回転軸とした回転変換であることと同値である．

O：これは当たり前ではないのですか？

A：どうしてそう思うかな．

O：だって，ビーチボールがあるとして，その中心の位置を変えないように置きなおすということは，つまり回すしか仕方ないと思うのですが．だから回転変換で表現できると思うのですが．

A：なるほど．直感的にはそういうことだけど，根拠としては数学的に正しくないんだ．

O：どうしてでしょう．

A：ビーチボールがここに置いてあるとして，ビーチボールの中心をとおるような直線を考えてその直線に関する回転移動を考える．これは「中心の位置を変えないような置き方」だね．別の言い方をすると，ビーチボールの対蹠点にあたる２点に指をあてて，指をあてたところを止めたままくるりとビーチボールを回転させることが可能で，これは中心の位置も変えていないということになる．

O：そうですね．

A：要は,「それがすべてかどうか」ということなんだ．たとえば，一回ある軸を中心として少し回転させた後に，別の軸について別の方向に少し回転させたとする．このような場合にも「回転で表現されるか」という問題があるんだ．

O :???? どういうことですか？今の先生の例だと，回転を２回行っているわけですから回転変換で表現されているのではないでしょうか？

A：宿題６の文章をよく読んでごらん．ビーチボールの中心を変えない置き方は「1 回の」回転変換で表現されることを証明せよ，と言っているんだよ．

O：そういうことなんですか？たしかに一回という文言は宿題の中にはありませんが，言われてみればそういう意味ですね．しかし，今度は結論は逆であるように思えてきました．つまり，ある軸を中心として少し回転させた後に，別の軸

についてまた少し回転させたとすると，これを 1 回の回転で表現することは無理だと思います.

A：直感的には無理に思えるんだけれど，実は「できる」というのが数学の定理なんだなぁ.

O：そうなんですか．証明ができるんですね．これは，実際に軸を見つけることができて，何度回転させるのかを計算することもできるという意味と解釈していいですか.

A：そう解釈してもらってかまいません．実際に軸を見つけることも回転する角度を求めることも可能です.

O：それは不思議だ！その証明は長いんですか？

A：実は長いのです．だから，どこまで解説するかちょっと迷うところでもあるんだけど，どうしますか.

O：線形代数の知識はどのくらい必要ですか.

A：結構必要で，通常の線形代数の教科書に書いてあることをほぼすべて理解していないと厳しいです．ではあらすじを言いますね．第 1 段階として，まずは「ビーチボールの中心を動かさない移動」を 3 次元空間の変換として考えたときには $SO(3)$ の要素で表されるということ.

O：これは前の宿題で考察したので大丈夫です.

A：第 2 段階として，$SO(3)$ の固有値は（複素数であることもあり得て）重複も込めて 3 つあるけれど，それぞれの固有値の（複素数としての）絶対値が 1 と等しいことを示す.

O：これは，線形代数の練習問題として聞いたことがあります．たしか，行列 $A \in SO(3)$ が固有値 α を持つとすると，A の転置行列 ${}^tA$ も同じ固有値を持つことがいえて（A も ${}^tA$ も固有多項式が同じだというのがその理由でした），$SO(3)$ の要素であるという要件から ${}^tA = A^{-1}$ ですから，α は A^{-1} の固有値でもあることになります．このことから，A の固有値に $\dfrac{1}{\alpha}$ がふくまれることになりますが，$\cdots$ うーーん，あとどうしましょう.

A：そこまでわかっていればあとは少しだね．α がもし実数でない複素数であると仮定すると，A の固有値に $\bar{\alpha}$(α の複素共役) もふくまれることから，$\dfrac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$ という等式が成り立ち，$|\alpha|^2 = 1$ が導出できるね.

O：なるほど．α が実数でない複素数であるとすると，固有方程式の解は $1, \alpha, \bar{\alpha}$ の 3 つだということを読んだこともありますが，同じような理由ですね.

A：そうだね．固有方程式は実数係数だから，α が解ならば $\bar{\alpha}$ も解であること

がわかるわけだが，$A \in SO(3)$ ということから A の行列式が 1 だという条件が付いていて，かつ行列式は 3 つの固有値の積と等しい，という定理があるから，複素数の固有値を含む場合の実数の固有値は 1 に限ることがわかるね．

O：そういう感じでまとめるんですか．わかりました．あとは，3 つの固有値がすべて実数の場合ですが，この場合に上と同じように考えると固有値が $1, \alpha, \dfrac{1}{\alpha}$ とおけます．ここからどうやって攻めるのでしょうか．

A：うん．いろいろやり方はあると思うけれど，$\alpha \neq \pm 1$ だと仮定すると，3 つの異なる固有値を持つような行列は必ず対角化可能であることから，${}^tA = A^{-1}$ という式に代入すると，結局 $\alpha = \pm 1$ が導出できて矛盾．結局固有値は ± 1 しかないことがわかる．

O：なーるほど．次へ行ってください．

A：第 3 段階へ行こう．α が実数でない複素数で，3 つの固有値が $1, \alpha, \bar{\alpha}$ であると仮定して話を進める．この時，固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{v}}$ であると置くことができる．

O：複素共役な固有値については固有ベクトルも複素共役になるのですね．

A：まあね．固有値に関する等式 $A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$ の両辺の複素共役を取ってみればそのことはすぐにわかるよ．行列 A の成分は実数だからね．

O：あ，ほんとだ．

A：特に，$\boldsymbol{v}$ は複素ベクトルになるので，これを $\boldsymbol{v}_1 + \sqrt{-1}\boldsymbol{v}_2$ という形に書いておく．このとき，実に素敵な定理があるんだ．

定理

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は互いに直交し，長さ 1 であるように取れる．つまり，$P = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ とおくと，P は直交行列である．

O：へえ．そうなんですか．証明はゴリゴリ計算すればできますか．

A：できるね．少し根気が必要だけれども．

O：先生，この定理で,「互いに直交し」は自動的にいつでも成り立つことで「長さ 1 であるように取れる」というのは「人為的に取ろうと思えばとれる」という意味で大丈夫でしょうか．

A：ああ，そうそう．そうなんだよ．固有ベクトルは長さに関しては自由に取れるからね．

O：はい．で，互いに直交して長さが 1 であるようなベクトルの列を「正規直

交系」と呼ぶこと，それを並べて正方行列を作れば直交行列になることは，線形代数で習いました．それでどうするんでしょうか？

A：第 4 段階では $P^{-1}AP$ を計算すると，実はこの形になる

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

O：ほんとですか？この θ はどうやって決まるのですか？

A：それは他愛もない話で，$\alpha = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ で θ を決めることができる．

O：え？でもですね，α がこういう風に $\cos, \sin$ で表される保証はないんじゃないですか．

A：いや，ある．$|\alpha| = 1$ であることがここで効いてくるね．

O：へーー．なるほど．なるほどーー．すごく感心しました！ それで，上の $P^{-1}AP$ に関する等式は簡単に計算できるのですか．

A：これはそれほど大変ではない．ただし，P が直交行列であることから ${}^tP = P^{-1}$ であることを使わないといけないよ．

O：うわぁ，あちこちにいろいろな性質が効いてくるんですね．すごいや．

A：第 5 段階としては，直交行列 P が表す変換が合同変換であることを確認して，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が x 軸に関する θ 回転変換であることから，結論が従う．

O：？？？えっと，すぐにわかりません．直交行列が表す一次変換が合同変換であることは，宿題 2 で習いました．それは大丈夫です．それからこの θ の入った行列が軸回転であることもなんとなくわかります．そこから結論がどのように従うのでしょうか．

A：ではそのカラクリについて説明しよう．まず x 軸を 1 次変換 P^{-1} で写したような直線を ℓ としよう．実は A は ℓ を軸とする θ 回転なのだな．

O：そうなんですか．それはどのようにわかりますか．

A：うん．まず，直線 ℓ が目の前にあるとして，直線 ℓ の上にホウキがあるとしよう．君はそのホウキの上にまたがっている．ここまではいいかな．

O：魔女の宅急便を思い浮かべます．はい．

A：それで，まず 1 次変換 P で写す．P は合同変換だということに注意しよう．自分のいる位置がホウキもろとも P で動くことになる．ℓ を P で写すと x 軸

に重なる．これは ℓ の決め方から自然とそうなるね．とすると，P で動いたあとは，ホウキは x 軸上にあって，君はそこにまたがっていることになる．

O：はい．

A：そののちに x 軸周りに θ 回転して，そのあとに 1 次変換 P^{-1} を適用する．すると，ホウキもろとも x 軸周りに θ 回転したのちに，x 軸は再び ℓ に移されることになり，自分もそれなりの地点に戻される．で，この一連の動きをよーく考えると ℓ を軸とした θ 回転になっていることがわかるよ．

O：なんとなくわかります．まず，ホウキの動きだけ見てみればいいんですよね．最初の P で移されるとホウキは x 軸に重なります．x 軸回転してもホウキの場所は変わりません．P^{-1} によって，ホウキは直線 ℓ に上に戻ることになります．つまり，ホウキは最初と最後で位置が変わっていないんですね．でも自分はというと，ホウキにまたがっているという状況は変わっていませんが，x 軸回転をしたときにホウキのまわりを回ってしまいますから，最終的に全部終えて戻ってくるとそれはホウキ（直線 ℓ）に関する軸回転をしているように思います．

A：丁寧な説明だね．そういう理解でよいと思うよ．

O：確かに証明は長かったですね．それで，この宿題の問題の意味するところは，つまり 2 次元球面幾何学では,「回転」は存在するが「平行移動」は存在しないということですね．

A：そうなんだよねぇ．それはもともと「平行線が引けない」というあたりに端を発しているのではないかとも思っているのだが，その関連性はちょっと説明できてないのが本音なんだ．でも指摘してくれたとおりだね．