第１３章

（第１３章宿題１）　図３と同じものをソフトウエアを用いて描画してみよ．

O：プログラミングはパスしたいんですけれど …. いいでしょうか.

A：そうですね．ここでプログラムについての説明をするのもどうかと思いますので，サイトにプログラムのファイルを上げておくことにしましょう．URL は

`http://www.aharalab.sakura.ne.jp/thurston/HW13-1.nb`

です.

O：これは？.nb という拡張子のついたファイルですが，これが Mathemtaica のファイルだという意味でしょうか.

A：そうです．プログラムを組めるならば，Mathematica 以外のプログラム言語でも挑戦してほしいんですけどね.

O：プログラムを組めるようにはなりたいのですが ….

（第１３章宿題２）　本文中，上半平面 H とは

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Im}(z) > 0\}$$

のことである．任意の $PSL_2(\mathbb{R})$ に属する関数 $f(z)$ により，H の要素は全単射で H へと移されることを証明せよ．

O：これは,「H の要素が f で H に移されること」と「全単射であること」の両方を示さなければいけませんね.

A：うん．基本的な証明なのでやってみて.

O：やってみます．まず，$z = x + y\sqrt{-1}$ とおきます.

A：うん．$\mathrm{Im}(z) > 0$ という仮定はどうなるかな.

O：$\mathrm{Im}(z) = y$ ですから $y > 0$ ですね．それで，$\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)$ を調べればいいということですね．計算してみます.

A：計算になると目が輝くね.

O：はい！

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{a(x+y\sqrt{-1})+b}{c(x+y\sqrt{-1})+d}\right)\\
&=\frac{ay(cx+d)+(ax+b)(-cy)}{(cx+d)^2+(cy)^2}\\
&=\frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+(cy)^2}
\end{aligned}$$

おおっ．これは分かりやすい結果になりました．分母はいつでも正ですが，いま，行列の仮定から $ad-bc=1$ であって，問題の仮定より $y>0$ ですから，この式の値は正だとわかります．つまり $f(z)\in H$ が示されました．

A：それでいいね．では，全単射であることはどうやって示そうか．

O：逆写像 f^{-1} が $f^{-1}:H\to H$ として定義できればいいとおもいます．

A：そういうことでいいね．では，逆写像を作ってください．

O：これは $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ を z について解けばよいと思います．

$$\begin{aligned}
w&=\frac{az+b}{cz+d}\\
(cz+d)w&=az+b\\
(cw-a)z&=-dw+b\\
z&=\frac{-dw+b}{cw-a}
\end{aligned}$$

ですね．なんだか逆行列の公式のような気もしますが，ともかく求まりました．

A：うん．それでいいね．この逆写像 $f^{-1}(w)=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ が $H\to H$ という写像であることは大丈夫かな．

O：はい，それなんですが，今しがたした計算と同じような計算をもう一度すればいいとも思いますが，それよりも単に，$f^{-1}(w)=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ が $(-d)(-a)-bc=ad-bc=1$ になっていることから $f^{-1}\in PSL_2(\mathbb{R})$ だから，という理由でよいのではないかと思います．

A：おお．いいことに気が付いたね．その説明のほうがよっぽどスマートでいいよ．逆写像がもとまったから，全単射ということでいいね．

（第１３章宿題３） $f_1(z)=\dfrac{az+a}{-az+a}=\dfrac{z+1}{-z+1}$(ただし $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$) が複素数平面の上半平面モデルの $\sqrt{-1}$(虚数単位) を中心とした 90 度回転であることを

示せ．

O：この問題なのですが，何を示せば「90 度回転」であることを示せるのでしょうか．試しにいくつかの点をこの写像で移してみることはできるのですが，それが 90 度回転であることを説明するには十分ではないように思います．

A：それはもっともな疑問ですね．それには後でヒントを出すことにして，とりあえずはいくつかの典型的な点についてこの写像での像を求めてみましょう．たとえば $z = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}$ なんかどうですか．

O：これは回転の中心であることが予告されている $\sqrt{-1}$ の真下にあります．ですから，90 度回転すれば真横に来るべきと想像できます．

A：まぁ計算してみてください．

O：

$$
\begin{aligned}
f_1\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right) &= \frac{\dfrac{\sqrt{-1}}{2}+1}{-\dfrac{\sqrt{-1}}{2}+1} \\
&= \frac{\sqrt{-1}+2}{-\sqrt{-1}+2} = \frac{3+4\sqrt{-1}}{5}
\end{aligned}
$$

こんなもんですか．$\sqrt{-1}$ の真横ではないですね．

A：ところがそうでもないんです．

O：えっ．

A：$\dfrac{3+4\sqrt{-1}}{5}$ はなんとなく単位円の上にあるような気がしませんか．

O：そういわれてみれば，ピタゴラス数の $3, 4, 5$ が出てきますからそうなっていそうですね．

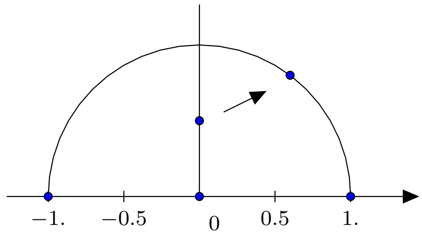
A：せっかくなので，$z = t\sqrt{-1}$（ただし $t > 0$）が f_1 でどこに移されるかを調べてみてください．

O：

$$
\begin{aligned}
f_1\left(t\sqrt{-1}\right) &= \frac{t\sqrt{-1}+1}{-t\sqrt{-1}+1} \\
&= \frac{(t\sqrt{-1}+1)^2}{t^2+1} = \frac{(-t^2+1)+2t\sqrt{-1}}{t^2+1}
\end{aligned}
$$

えーと，これも単位円上にあるんでしょうか．……，ありそうですね．

A：これを図に書いてみましょう …． どうですか．



O：あ，つまり $z = t\sqrt{-1}$ が虚軸の上を動くと $f_1(z)$ が単位円の上を動くということですね．虚軸と単位円はどちらも双曲幾何の上半平面モデルにおいては双曲直線になります．

A：虚軸と単位円はどちらも双曲直線であって，点 $\sqrt{-1}$ のところで直交しているというわけですね．だから「90 度回転すると虚軸は単位円に移る」というのは感覚として正しいわけです．

O：なーるほど．これで，何となく f_1 が 90 度回転であるという状況証拠は得られたわけです．さて，では「証明」ですが，これはどうするんでしょうか．

A：上半平面のままだとむずかしいですね．そこで，宿題 6 の内容が正しいとして，この f_1 をポアンカレ円板モデルへと置き換えてみましょう．$T : H \to D : T(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ とおいて，$T \circ f_1 \circ T^{-1}(z)$ を計算してみてください．

O：これは，ただ合成関数を計算するだけでいいわけですよね．

A：そうなんです．つまり，この写像 T によって上半平面モデルの双曲幾何とポアンカレ円板モデルの双曲幾何とが対応しているということは分かっているものとして計算しているわけです．

O：それなら簡単です．下計算をして $T^{-1}(z) = \dfrac{\sqrt{-1}z + \sqrt{-1}}{-z+1}$ でしたので，途中計算を省きますが，

$$
\begin{aligned}
T \circ f_1 \circ T^{-1}(z) &= T \circ f_1 \left(\frac{\sqrt{-1}z + \sqrt{-1}}{-z+1} \right) \\
&= \frac{(\sqrt{-1} - 1 - 1 + \sqrt{-1})z + i(\sqrt{-1} + 1 - 1 - \sqrt{-1})}{(\sqrt{-1} - 1 + 1 - \sqrt{-1})z + (\sqrt{-1} + 1 + 1 + \sqrt{-1})} \\
&= \frac{-2 + 2\sqrt{-1}}{2 + 2\sqrt{-1}} z = \sqrt{-1} z
\end{aligned}
$$

ですね．なるほど．$f(z) = \sqrt{-1}z$ というのは原点中心の 90 度回転ですね．これはポアンカレ円板モデルでの話だと思いますが，原点中心だったら 90 度回転はそのまま双曲幾何としても 90 度回転になっているのですね．

A：はい．計算お疲れさま．

O：ちなみに，上半平面モデルで，$z=\sqrt{-1}$ 以外の点 z_0 を中心とするような回転はどのように構成すればいいでしょうか？

A：細かく言わないので，後で自分で考えてほしいけれど，まず z_0 を $\sqrt{-1}$ へと移すような上半平面モデルの合同変換をみつけることだね．それを使って表すことができるよ．

O：後で自分で考えてみます．

（第１３章宿題４）　$PSU(1,1)$ とは

$$PSU(1,1)=\left\{f(z)=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\;\middle|\; a,b\in\mathbb{C},|a|^2-|b|^2=1\right\}$$

である．$PSU(1,1)$ に属する関数 $f(z)$ により，単位円板 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ の要素は全単射で D へと移されることを証明せよ．

A：これは H のときと同じような感じでしょうか．まずは D の要素を $f(z)\in PSU(1,1)$ で移すと D の要素へと移ることを示す．あとは逆写像を求めることだね．

O：はい．ではまず $z\in D$ を考えます．D の定義により $|z|<1$ が成り立ちます．これはどうなんでしょう，$z=x+y\sqrt{-1}$ とおきなおして x,y で計算したほうがいいでしょうか？

A：ちょっと考えると (z で計算するのも x,y で計算するのも）どっちもありそうだね．こういう時はヤマ勘の「勘」ではなく感性の「感」で選べるとカッコいいんだけどなぁ[1]．

O：計算を始める前に決断したほうがいいですか？

A：カッコよく始めたいならできるだけそうしたほうがいいよ．

O：うーん．ちょっと考える時間をください．（しばらく考える．）複素数のまま行ってみたいと思います．

A：ほう．また，どうしてそう考えたかな．

O：えーと，まず，$PSU(1,1)$ の係数の a,b が複素数だというのがありますね．x,y でいくのなら，a,b も実部と虚部に分けなければいけないでしょう．そうすると計算がごちゃごちゃしそうです．

[1]「勘」ではなく「感」というフレーズは，浅井義貴さんが書いた 21 期囲碁名人戦第 2 局の観戦記にある印象的なフレーズです．

A：うん．理由としてもいいんじゃないかな．そういう風に，計算する前に見通しを立ててから計算を始めるということは大事だね．

O：はい．では複素数でやってみます．$f(z) = \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ とおいて，これを D に含まれることを示したいので，$|f(z)| < 1$ を証明できればいいと思います．

A：ではどうぞ．

O：$|f(z)| = \left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|$ ですが，これだけでは埒があきませんね．あ，分数に分ければいいですか．$\dfrac{|az+b|}{|\bar{b}z+\bar{a}|}$ ですか．分母と分子の大きさを比較してみましょうか．でもどうしますかねぇ．

A：何気に僕に振ってヒントを求めないようにね（笑）

O：バレましたか．グッとにらんでパッと思いつけばいいんですけど．

A：まぁ，考えてみて．

O：はい……$|az+b|^2$ と $|\bar{b}z+\bar{a}|^2$ とを比較してみる，というのはどうですかねぇ．形が似ているので，同じような式が出てきて比較できるような気もします．

A：やってみて，うまくいかなかったらまた考えればいいよ．

O：そうですね．やってみます．

$$|az+b|^2 = (az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) = |a|^2|z|^2 + |b|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z}$$
$$|\bar{b}z+\bar{a}|^2 = (\bar{b}z+\bar{a})(b\bar{z}+a) = |b|^2|z|^2 + |a|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z}$$

おや，思っていたより式の形が似ていますね．引き算してみます．

$$|az+b|^2 - |\bar{b}z+\bar{a}|^2 = (|a|^2 - |b|^2)|z|^2 + |b|^2 - |a|^2$$

ああ？$|a|^2 - |b|^2 = 1$ でしたっけか．

$$|az+b|^2 - |\bar{b}z+\bar{a}|^2 = |z|^2 - 1 < 0$$
$$|az+b|^2 < |\bar{b}z+\bar{a}|^2$$
$$|f(z)| = \left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| < 1$$

証明できました！

A：なるほど．うまくいきました．

O：全単射は宿題２と同じだと思うので，逆写像をもとめて，それが $PSU(1,1)$ に含まれることを示したいと思います．今気が付いたのですが，$PSU(1,1)$ とか $PSL_2(\mathbb{R})$ は一次分数変換の群だったり行列群だったりしているのでしょうから，逆写像があるのはある意味当然なんですね．

A：と，いうより，一次分数変換や行列のうち，全単射になるものを集めて，そこに条件を付けて群にしているという感じかな．ともかく逆写像を求めてみて．

O：さっきとは変えてみて，今度は $z = \dfrac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}$ から始めて $w =$ の形を目指します．これは簡単な計算で，

$$f^{-1}(z) = w = \frac{\bar{a}z - b}{-\bar{b}z + a}$$

ですね．ここはグッとにらんで，$A = \bar{a}$, $B = -b$ とおきましょうか．そうすると

$$f^{-1}(z) = w = \frac{Az + B}{\bar{B}z + \bar{A}}$$

と書けますので，f^{-1} も $PSU(1,1)$ の要素であることがわかり，$f^{-1} : D \to D$ であることが確認できました．かつ，f^{-1} は f の逆写像です．

A：はい，それでいいね．

（第１３章宿題５）　$T : H \to D : T(z) = \dfrac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}$ **とすると，**$f(z) \in PSU(1,1)$ **に対して，**$T^{-1} \circ f \circ T(z)$ **は** $PSL_2(\mathbb{R})$ **に属する関数であることを証明せよ．**

O：これは一本道に $T^{-1} \circ f \circ T(z)$ を計算してみて，その形を調べればいいということですね．

A：はい．やってみましょう．

O：$T^{-1}(z) = \dfrac{\sqrt{-1}z + \sqrt{-1}}{-z+1}$ でしたから，

$$\begin{aligned} T^{-1} \circ f \circ T(z) &= T^{-1} \circ f\left(\frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}\right) \\ &= T^{-1}\left(\frac{(a+b)z + (-a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1})}{(\bar{b}+\bar{a})z + (-\bar{b}\sqrt{-1} + \bar{a}\sqrt{-1})}\right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}(a+b+\bar{a}+\bar{b})z - (-a+b-\bar{b}+\bar{a})}{(-a-b+\bar{a}+\bar{b})z + \sqrt{-1}(a-b-\bar{b}+\bar{a})} \end{aligned}$$

さて ……

A：計算はいいようだね．

O：この係数は実数なんですか？（少し考える．）ああ，実数なんですね．$a+\bar{a}$ や $b+\bar{b}$ は実部の 2 倍なので実数，$a-\bar{a}$ や $b-\bar{b}$ は虚部の $2\sqrt{-1}$ 倍なので純虚数なんですね．そういう理由で，分母分子を $\sqrt{-1}$ で割れば係数はすべて実数であることがわかります．あとは行列式にあたるところが 1 になるかどうかを調べるわけですが，これは計算するよりほかにないですよね．

A：やってみて．

O：はい，分母分子を $\sqrt{-1}$ で割った形で考えます．$A=(a+b+\bar{a}\bar{b})$, $B=\sqrt{-1}(-a+b-\bar{b}+\bar{a})$, $C=-\sqrt{-1}(-a-b+\bar{a}+\bar{b})$, $D=(a-b-\bar{b}+\bar{a})$ とすると，

$$\begin{aligned}AD &= (2\mathrm{Re}(a))^2-(2\mathrm{Re}(b))^2\\ BC &= -(2\mathrm{Im}(a))^2+(2\mathrm{Im}(b))^2\\ AD-BC &= (2\mathrm{Re}(a))^2+(2\mathrm{Im}(a))^2-(2\mathrm{Re}(b))^2-(2\mathrm{Im}(b))^2\\ &= 4(|a|^2-|b|^2)=4\end{aligned}$$

おや？結構イイ感じの計算だとは思います．ただし $AD-BC=1$ という計算を期待したんですが．

A：これは大丈夫だよ．「分母分子を $\sqrt{-1}$ で割った」と言っていたが，「分母分子を $2\sqrt{-1}$ で割る」に変更すれば，$A'=(a+b+\bar{a}\bar{b})/2$, $B'=\sqrt{-1}(-a+b-\bar{b}+\bar{a})/2$, $C'=-\sqrt{-1}(-a-b+\bar{a}+\bar{b})/2$, $D'=(a-b-\bar{b}+\bar{a})/2$ となって，$A'D'-B'C'=1$ になります．要するに，分母分子を共通の数で割ることは許されているので，その範囲で大丈夫だということになります．

O：よかったです．

（第１３章宿題６）　$T:H\to D:T(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ **とすると，**$f(z)\in PSL_2(\mathbb{R})$ **に対して，**$T\circ f\circ T^{-1}(z)$ **は** $PSU(1,1)$ **に属する関数であることを証明せよ．このことにより，上半平面の双曲合同変換は** $PSL_2(\mathbb{R})$ **であり，ポアンカレ円板による双曲合同変換は** $PSU(1,1)$ **であり，この二つが写像** T **で移り合うことがわかる．**

O：これも検証するだけならば計算一本道のようですね．

A：そうだね．やってみよう．

O：

$$\begin{aligned}T\circ f\circ T^{-1}(z) &= T\circ f\left(\frac{\sqrt{-1}z+\sqrt{-1}}{-z+1}\right)\\ &= T\left(\frac{(a\sqrt{-1}-b)z+(a\sqrt{-1}+b)}{(c\sqrt{-1}-d)z+(c\sqrt{-1}+d)}\right)\\ &= \frac{(-b+c+(a+d)\sqrt{-1})z+(b+c+(a-d)\sqrt{-1})}{(-b-c+(a-d)\sqrt{-1})z+(b-c+(a+d)\sqrt{-1})}\end{aligned}$$

ですね．

A：ここで $A=-b+c+(a+d)\sqrt{-1}$,$B=b+c+(a-d)\sqrt{-1}$,$C=-b-c+(a-d)\sqrt{-1}$,$D=b-c+(a+d)\sqrt{-1}$ とおくとどうだろう．

O：$C=-\bar{B}$, $D=-\bar{A}$ ですね．微妙に条件が満たされません．これも分母分子に何かをかけるのでしょうか．

A：そうだね，分母分子に $\sqrt{-1}$ をかけてみようか．

O：そうすると

$$\frac{((-a-d)+(-b+c)\sqrt{-1})z+((-a+d)+(b+c)\sqrt{-1})}{((-a+d)+(-b-c)\sqrt{-1})z+((-a-d)+(b-c)\sqrt{-1})}$$

ですね．

A：今度は $A'=(-a-d)+(-b+c)\sqrt{-1}$, $B'=(-a+d)+(b+c)\sqrt{-1}$, $C'=(-a+d)+(-b-c)\sqrt{-1}$, $D'=(-a-d)+(b-c)\sqrt{-1}$ とおくと $C'=\bar{A}'$, $D'=\bar{B}'$ となって都合がいいですね．もう一つの条件はどうでしょうか．$A'D'-B'C'$ が 1 になればいいわけですが．

O：やってみます．

$$\begin{aligned} A'D'-B'C' &= (-a-d)^2+(-b+c)^2-(-a+d)^2-(b+c)^2 \\ &= 4(ad-bc)=4 \end{aligned}$$

また 4 ですか…．でもこれはさらに分母分子を 2 で割ればいいということですね．

A：そうだね．これで確認できました！