

第14章

（第14章宿題1） 3次元双曲空間にいたとして、やはり「遠いものは小さく見える」だろうか？ユークリッドの場合と比べて「遠いものの小さく見え方」は異なるだろうか？

O: 何となくですが、「遠いものの小さく見え方」は同じではないかという気がします。

A: それはどうしてかな。

O: 双曲空間でもユークリッド空間でも結局距離は距離ですし、たとえば「相手が自分から10メートル離れている」という事実は変わらないので、同じように見えるのではないかと思います。

A: あーなるほど。それはなかなかいい意見だね。では、計算によって検証してみよう。

O: と、いうことは違うんですね(草)

A: ふふ、どうかな。ともかく、質問の趣旨を定式化したほうがいいね。まず、自分から10メートルのところにPさん、20メートルのところにQさんが立っているとすると、PさんとQさんの身長が同じだとするとき、PさんはQさんよりも大きく見えるね。このことはいいでしょう？

O: それはそうですね。Pさんのほうが近くにいるわけですから。

A: ではその「大きく見え方」はユークリッドと双曲で異なるか、ということなんだよね。

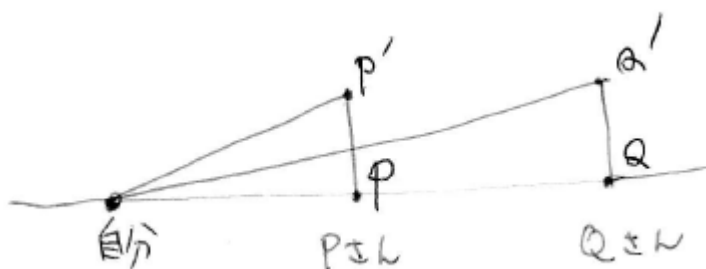
O: これは角度の問題ですね？

A: (ニヤリ) そうなんだよ。視野の中で物体が見える角度のことを画角というね。

O: つまり、PさんとQさんがそれぞれ10メートル、20メートルのところにいるという状況は同じだとして、見え方が変わるかどうかということですね。うーん。角度を式で計算すればすぐにわかるでしょうけれど。

A: まずはユークリッド幾何のときに「自分がどこにいるか」を上手に設定して計算してみるかな。

O: そうしましょう。まず話を単純化するために、僕は身長が0で原点のところに目があるものとします(図14-1a)。



(図14-1a)

この図で、僕の視点は O , P さんの立っているところを P , P さんの頭の位置を P' , Q さんの立っているところを Q , Q さんの頭の位置を Q' とします。ここで, $OP = 10, OQ = 20$ です。身長を a とすると, $PP' = QQ' = a$ ですから, P さんの画角は $\arctan(a/10)$ で Q さんのそれは $\arctan(a/20)$ となります。 a が決まらなるとこの比ははっきりしませんが, たとえば $a = 1.5$ で計算してみると,

$$P \text{ さんの画角} = \arctan(a/10) \sim 0.148890$$

$$Q \text{ さんの画角} = \arctan(a/20) \sim 0.0748598$$

$$\text{画角の比} = \arctan(a/10) / \arctan(a/20) \sim 1.98892$$

となります。

A: 次はおなじ状況を双曲幾何で作ってみよう。

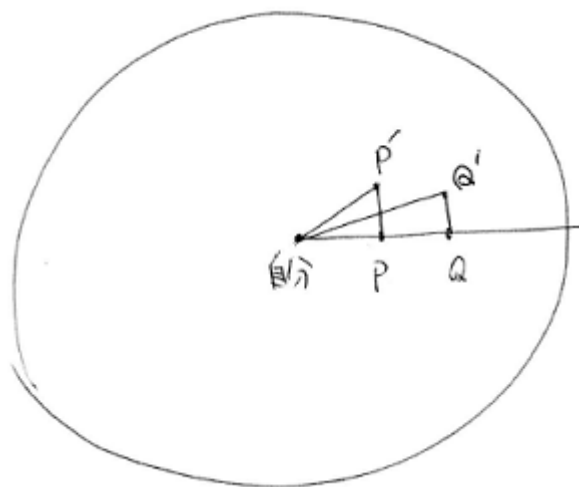
O: では, 同じように目が原点にあるものとします。おや, そうか。双曲幾何学では双曲直線に沿って光が進むと考えるのですね。

A: 当然そうなります。

O: 絵をかいてみますね。あっ。

A: 気が付いたね。

O: ええ。ユークリッドの時の絵 (図 14-1a) と双曲幾何の時の絵 (図 14-1b) を両方並べてみたら, 基本的に同じ絵だということがわかりました。つまり, 原点から見ると, 双曲直線=ユークリッド直線であって, かつ原点においては双曲角度=ユークリッド角度なわけですから, 結局同じ絵で比較すればいいですね。



(図 14-1b)

A: そういうこと. ただし, PさんQさんが「まっすぐ立っている」というのは双曲直線に沿うのでほんの少しカーブしますが, 水平距離に比べれば小さいので気にしないで進めることにしましょう.

O: はい. それで気が付いたのが, ユークリッドだと $OP/OQ = 2$ なんですけれど, 双曲幾何だと外から見ると $OP/OQ < 2$ になりますね. 双曲距離が2:1だということは, この図では OP/OQ は2よりずいぶん小さくなります. ということは角度の比も小さくなるように思います.

A: それほど単純じゃないんだなあ. 同じように P, Q, P', Q' をきめると $PP' > QQ'$ になってしまうからね.

O: 双曲幾何の円盤モデルにおける双曲距離の公式があります (参考: 阿原一志著「作図で身につく双曲幾何学」(共立出版)). $OP = p$ と置くと, O と P の双曲距離は $\log \frac{1+p}{1-p}$ です. 今これが10だと言っているのも $\log \frac{1+p}{1-p} = 10$ ですが, これも公式があって, $p = \tanh(10/2)$ となります. ただしここで \tanh は双曲タンジェント関数です. 同じように $OQ = q$ とおくと, $OQ = q = \tanh(20/2)$ になります.

A: はい, それでいいと思います. あとは PP' と QQ' の比較だね.

O: これは, 縮尺の問題で, 点 P における縮尺は O における縮尺の $\frac{1}{1-p^2}$ だけ小さくなりますから, 身長が a だということにすると PP' はおよそ $(1-p^2)a$ だということになります. 同じように QQ' はおよそ $(1-q^2)a$ です.

A: そうすると, 双曲空間での P さんの画角はどうなるだろう.

O :

$$OP = p = \tanh(10/2) \sim 0.96402758$$

$$PP' = (1 - p^2)a \sim 0.105976$$

$$P \text{ さんの画角} = \arctan(PP'/OP) \sim 0.10949$$

$$OQ = q = \tanh(20/2) \sim 0.9999999958$$

$$QQ' = (1 - q^2)a \sim 1.23669 \times 10^{-8}$$

$$Q \text{ さんの画角} = \arctan(QQ'/OQ) \sim 1.23669 \times 10^{-8} \text{ 画角の比} \sim 8.85346 \times 10^6$$

ありやりや. ずいぶん違いますね. 一般論ではどうなのかわかりませんが, 双曲距離のほうが「遠いものがより小さく見える」ことになりそうです.

A : そうみたいだね. この計算でおなか一杯なので, 一般論の計算はもういいや.

O : あとで余裕があればやってみます.

(第14章宿題2) 双曲正12面体のうち, 面(正5角形)の角がすべて直角になるようなものを考え, その頂点の座標を計算せよ.

O : これは難問ですね. そもそも, ユークリッド空間でも正12面体の頂点の座標を知りませんし, どうやって求めればよいのか見当もつきません.

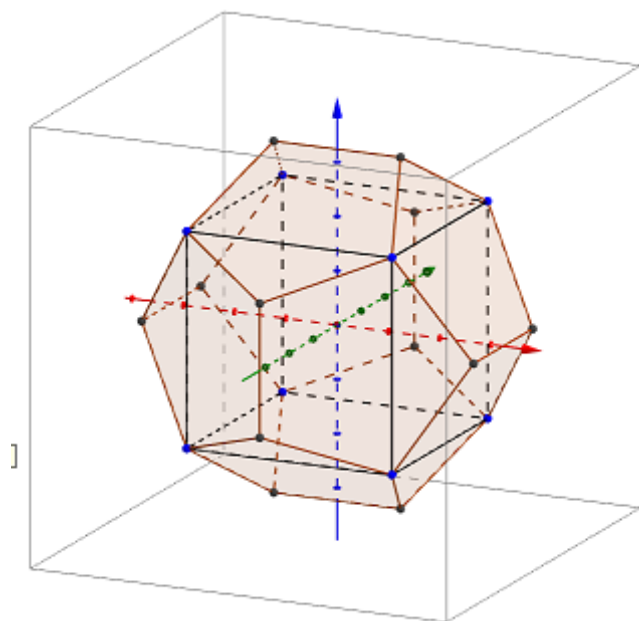
A : 確かにそうかもね. 正12面体の頂点の座標については, 自力で考えられればそれに越したことはないんだけど, ちょっとズルしてネットとかで調べてみてもいいよ.

O : ではそうします.

(数日後)

A : わかった?

O : ずいぶん考えたのですが, 結局調べました. こういう感じの図がわかりやすかったです. GeoGebra で再現してみました.



(図 14-2)

正 12 面体に内接する立方体があるのですが、この立方体の一边を $2X$ としておくと、正 12 面体の一边は $(\sqrt{5}-1)X$ になります。立方体の頂点の座標を $(\pm X, \pm X, \pm X)$ と書くことができます。これは \pm の組み合わせが 8 通りあります。この X を使って計算すると、残りの頂点の座標は $\left(\pm \frac{\sqrt{5}+1}{2}X, \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0\right)$, $\left(0, \pm \frac{\sqrt{5}+1}{2}X, \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}X\right)$, $\left(\pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0, \pm \frac{\sqrt{5}+1}{2}X\right)$ で、これもそれぞれ \pm が 4 通りずつ、全部で 12 個あります。

A: さてでは、この正 12 面体が単位球面の内側にあると仮定して、どれか面を 1 つ選んで、その 5 点を通るような双曲平面を求めましょう。

O: はて、どの 5 頂点が面を作っているかを見定めないとはいけませんね。

A: x 座標が大きい順番に並べてみるといいと思うよ。

O: はい。一番 x 座標が大きいのは $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}X, \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0\right)$ の 2 個ですね。その次に大きいのが、 $(X, \pm X, \pm X)$ だとわかります。

A: うん、その次もわかるといいかな。正 12 面体の図を見ながら想像力を働かせてみよう。

O: はい。 X 座標の大きさが 3 番目なのは $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0, \pm \frac{\sqrt{5}+1}{2}X\right)$ ですが、あとは面を作るものの組み合わせですね。

A: ぐっとにらんで決めてください。

O: うーん。

$$\begin{array}{cc} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}X, \frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0 \right) & \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}X, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0 \right) \\ (X, X, X) & (X, -X, X) \\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}X, 0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}X \right) & \end{array}$$

ですかね。上に出てきたものの中で、 z 座標が0以上になるものをピックアップしてみました。

A: なかなかいいね。この5点を通る球で、単位球面に直交するものを求めよう。

O: え……。簡単に言いますが、そんなの求まりますか。

A: うん。5点を通る球、とか考え出すと難しいけれど、中心の座標がある直線上に乗っていることを発見すればたぶん行けると思う。

O: そうですか?(しばらく考える。) ああ、原点から放射状に延びる直線ですね。正五角形の真ん中を通るような直線を求めればよいと思います。

A: その通りだね。ではその式を求めて。

O: ベクトル方程式がよさそうですね。正五角形の面の真ん中を通るということから、上の5つの点の平均を取ればよいと思います。そうすると、

$$\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{2}X, 0, \frac{\sqrt{5}+5}{2}X \right)$$

ですか。

A: 5つの頂点の和だね。平均ならこれを5で割るんだろうけれど、ベクトル方程式だからまあうるさいことはナシでいいや。球の中心を $\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{2}Xt, 0, \frac{\sqrt{5}+5}{2}Xt \right)$ とおこう。ここで t は正の定数だね。

O: そうすると、上の5点が球の上に乗っていなければいけませんから、半径を r とすると、

$$\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{2}Xt - X \right)^2 + (0 - X)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+5}{2}Xt - X \right)^2 = r^2$$

ですね。5点のうちのどれでもいいんでしょから、一番簡単そうな (X, X, X) と中心との距離で計算しました。

A: うん. いいと思うよ.

O: それで, 次に単位球に直交する条件ですが, 円が単位円に直交する条件というときには, 中心 (x, y) , 半径 r だったら $x^2 + y^2 = r^2 + 1$ という公式があったので, これも同じことですね. 球の半径は r なので,

$$\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{2}Xt\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+5}{2}Xt\right)^2 = r^2 + 1$$

ですね. t や r の 2 次式になっていて, 厄介そうなので, 細かい計算はあとですることにします.

A: うん. 「細かい計算は最後にまとめておこなう」というのはいい心がけだね. 途中で式が簡単になるかもしれないからね.

O: はい. それで, 次はどうしましょうか. これを見ると, X を決めると t, r が (たぶん一つに) きまるという感じでしょうか. X を決めるためにはもう一つ条件が必要です.

A: それは, 「面と面のなす角が直角である」という条件だね.

O: はー (溜息) 隣の面の式も求めないといけないですか. あ, でも, いま求めたものの符号をちょいちょいといじれば, 隣の面になりませんか?

A: するどいねえ. そういう感覚は重要です. さっきは z 座標が 0 以上のところで考えたので, 同じように z 座標が 0 以下であるような面を考えれば, z 座標の符号を変えるだけで, 最初の面のとなり (の一つ) の面がもとまることになるね.

O: 第 2 の球の中心は $\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{2}Xt, 0, -\frac{\sqrt{5}+5}{2}Xt\right)$ でいいですね. そうすると, この 2 つの球の中心の間の距離は $(\sqrt{5}+5)Xt$ ということになります. ここで X, t は上の式と共通です. 第 2 の球の半径は r と一致するというのでよいと思います.

A: はい. それで, 「面と面のなす角が直角である」というのを式にするとどうでしょう.

O: 直角ということで話が簡単になっていると思います. ピタゴラスの定理がそのまま使えますよね. そうすると

$$\{(\sqrt{5}+5)Xt\}^2 = r^2 + r^2$$

が成り立つと思います. 図を書いてみないといけないのかもしれませんが, 二つの円が直交しているような図を思い浮かべると, これでいいと思います.

A: そうだね, では, 式を整理してみよう.

O: はい。最後まで解けるかどうかわかりませんが、やってみます。まず最初の式が

$$\{(25 + 10\sqrt{5})t^2 - (10 + 4\sqrt{5})t + 3\}X^2 = r^2 \quad (1)$$

で、第2の式が

$$(25 + 10\sqrt{5})t^2 \cdot X^2 = r^2 + 1 \quad (2)$$

で第3の式が

$$(15 + 5\sqrt{5})t^2 \cdot X^2 = r^2 \quad (3)$$

です。(1)-(3)から

$$\{(10 + 5\sqrt{5})t^2 - (10 + 4\sqrt{5})t + 3\} \cdot X^2 = 0$$

となって、 $X \neq 0$ ですから $(10 + 5\sqrt{5})t^2 - (10 + 4\sqrt{5})t + 3 = 0$ が得られます。これで t が求まりますね。

$$t = \frac{5 + 2\sqrt{5} \pm \sqrt{15 + 2\sqrt{5}}}{10 + 5\sqrt{5}}$$

ですが？解が二つありますか？

A: これは、まだ式(2)を使っていないからね。

O: そうですね。では(1)-(2)として r を消去しますと

$$X^2(-10 + 4\sqrt{5})t + 3 = 0$$

を得ますが、ああ、これは数値的に計算してみないとわかりませんね。電卓を使うと、 t の値はだいたい 0.20564 と 0.68879 で、 $-(10 + 4\sqrt{5})t + 3$ は -0.8957 と -10.0486 です。それで、 X は 1.05662 と 0.315462 と求まります。しかし、 X は 1 未満でないといけませんから後者だということになります。

A: なるほど。ここから r も求まるね。

O: はい、でも、あの一、どうして答えが二つ出たんでしょうか。一つ該当しないということで結局はよかったのですが。

A: うむ。ちょっと面白い問題だね。半径を実際にもとめてみるといいかもね。

O: そうですね？(電卓でしばらく計算) おお。どちらの場合も、だいたい 1.11178 くらいになりますね。あっ、つまり、もしかして、これは同じ球面なんですか？

A: その通りだと思うよ。

O: つまり、「単位球面に直交するような球面で」「並んだ面が直交するような」「双曲正12面体」というものを求めていたわけですけど、この条件だけだと正12面体の頂点が単位円の外側にあることもありうるわけですね。

A: そうなんだね。双曲正12面体の頂点というのは、つまり3つの球面が1点で交わっているところになるわけだけでも、3つの球面が交わる時には、ふつうは2か所で一堂に会しているのだから、条件から計算してみると、「求める（球面の）交点は二つ」という形で答えが得られるわけだね。

O: それで、 t が二つ求まる理由はよくわかりました。

A: よかったよかった。

O: そのうえでー…、あの一、ちょっと疑問に思っちゃったんですけど

A: 为什么呢？

O: それで、この問題って何がうれしいんでしょうか？

A: (にっこりと作り笑いをして) 解けたということでもいいじゃないですか。

O: ああ…そうですね。

(第14章宿題3) 3次元双曲幾何学における領域 E の双曲体積は

$$\iiint_E \frac{8xdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^3}$$

で与えられる。上の双曲正12面体の体積を求めることができるだろうか？(何らかの計算する方法はあると思われるが、体積の定義だけから計算できるかどうかを筆者は試してみたわけではないので、できるかどうかの保障はない。)

A: この問題は… まあいいことにしませんか？

O: 先生がやらないといえば、僕は喜んで手を引きますが(草)

A: すみませんねえ。双曲体積の公式はたとえば、それが四面体だったら計算公式があったりするのですがねえ。

O: 先生がやらないといえば… (以下同文、棒読み)

A: ホントごめんね。

O: 先生が… (以下同文、棒読み)

A: だから、ゴメンて。