第１５章

（第１５章宿題１）　サーストンの描いた Solvegeometry の絵の展開図をみつけてください.（ぜひ解決してください。お願いします！）

A：さて …… 最後の章になりましたが。

O：あの、これなんですけど、記事は間違っていませんか？

A：そうですか？

O：本文中で Solvegeometry における平行移動はこれこれ、という式

$$(x, y, z) \mapsto (x + x_0, e^{x_0} y + y_0, e^{x_0} z + z_0)$$

が書いてありますが、これはあくまで平行移動に関するものであって、回転移動について書かれていませんよね？

A：ああまあそうですね。いや，原稿を書いたときにはないと思ったのですが.

O：「触ってはいけない柱を軸とした軸回転」はない、と本文に書いてありますが、回転移動、たとえば、ｚｙ平面に平行な面では回転移動もあるのではないかと考えたのですが、どうでしょうか。

A：そうですねぇ、そこのところをもう一度調べなおしてみましょう。

O：参考書はサーストン著，レヴィ編，小島定吉監訳「３次元幾何学とトポロジー」（培風館）ですか。

A：はい。

O：参考書のほうでは 186 ページのほうに，可解多様体の例というのが載っていますが，これが Solvegeometry の実例ということのようです．上の平行移動の式と同等のしきは掲載されています．あと，同じページに「可解幾何学の等長変換群を求めるという記述があります.

A：その部分を引用してください.

O：「$\mathbb{R}^2$ 方向には二つの固有空間に関する独立な鏡映が存在する．また $\mathbb{R}$ 方向の鏡映を同時にこの二つの固有空間を入れ換えるようにできる．したがって G' の G における指数は 8 である.」とあります．この G' や G というのは何でしょうか.

A：G は変換群で，これは要するに可解幾何学の合同変換の全体の意味です. 179 ページにある定理 3.8.4 の中で可解幾何学が紹介されているのですが，可解幾何学の特徴づけとして,「固定群の次元が 0 である」場合として書かれています.

O：固定群というのは何でしょうか.

A：空間の点 p を任意に固定したとしましょう．点 p を固定するような合同変換がどれほどあるかということなのですが，そのような合同変換が 0 次元だということで，簡単に p を固定するような合同変換が有限個であると考えてもらってもいいです.

O：つまり p を中心とする回転変換のようなものはないということでしょうか.

A：全くない，ということではないです．θ 回転の θ を自由に選ぶことはできないということですね.

O：固定群というのは p の選び方によって変わってしまうのでしょうか.

A：固定群は p によっては変わらない（群の同型である）ということが証明できます.

O：それで，サーストンの本の 179 ページには「G の単位元を含む連結成分を G' で表す」と書いてありますが，どういうことでしょうか.

A：合同変換全体の群 G も一つの図形のように考えて，つながり具合があると考えているんだね.（そういう考え方をリー群というけれど，このことについては深入りしません.）そうすると,「恒等変換とつながっている合同変換全体」という集合を考えることができて，これを G' で書き表しているです.

O：はあ．ともかく，そういうふうにセッティングすれば，リー群の知見がいろいろとあって具体的に分類することができるという理解でいいでしょうか.

A：まぁ今のところはそれでいいです．リー群については佐武一郎著「リー環の話 (日評数学選書) 」（日本評論社）を読んでみるといいね．ともかく，可解幾何学の場合には，点 p を固定するような合同変換は有限個しかなくて,「G' の G における指数は 8 である」という文章からそれが８つあるということがわかるわけね.

O：８つしかないんですか.

A：うん．それが「xy 平面に関する鏡映」「xz 平面に関する鏡映」「y 座標と z 座標を交換して yz 平面に関する鏡映」とその組み合わせだと言っているんだよね.

O：なるほどわかりました.

A：なんだかうれしそうだね.

O：ここの部分，自分で考えてみて，手ごたえがあったんです．この鏡映変換があるという部分から考えてみていたんですが，今質問して大丈夫だということが確信できました．そのことについて僕の意見を言ってもいいでしょうか.

A：どうぞ.

O：それで，本文の「軸回転の概念がありません．あくまで平行移動と伸縮しかない」についてですが，僕の意見は「鏡映があるのだから，軸に関する 180 度回転はあるのではないか」ということです.

A：なるほど．いわれてみればそうですね.

O：そうですか．では,「xy 平面に関する鏡映」「xz 平面に関する鏡映」を合成すると「x 軸に関する 180 度回転」だというのは正しいですか.

A：ああ，本当にそうですね．そのことをすっかり見落としていました.

O：次が問題なのですが,「y 座標と z 座標を交換して yz 平面に関する鏡映」というのは原点中心で考えると $(x, y, z) \mapsto (-x, z, y)$ という写像だと思うのですが，これは $x = 0, y = z$ という直線に関する 180 度回転であるということでいいでしょうか.

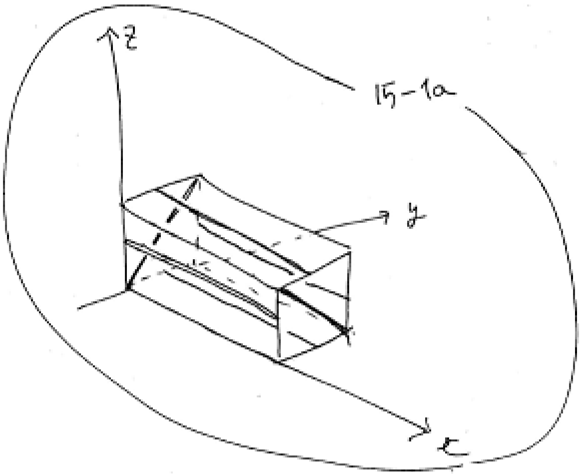
A：おやおやおやおや．どうしてそのことに気が付かなかったんだろう！これは！続けてください.

O：もうひとつ，すごいのに気が付いたんです.「xy 平面に関する鏡映」「xz 平面に関する鏡映」「y 座標と z 座標を交換して yz 平面に関する鏡映」を全部合成すると，$(x, y, z) \mapsto (-x, -z, -y)$ という写像になって，これは $x = 0, y + z = 0$ という直線に関する 180 度回転であることになりませんか.

A：恐れ入りました．そっかぁ $\cdots$ 僕もずいぶん考えていたんだけれど，180 度回転が変換群にないと思い込んでいたのが引っかかっていてわからなかったんです．ここまで聞いたら，最後までわかってしまいましたが，いやぁ，せっかくなので，O 君に最後まで説明してもらいましょう.

O：いいですか．今言ったのは原点中心で考えた場合の話なので，空間内の任意の点 p について,「点 p を通るような x 軸と平行な直線に関する 180 度回転変換」f_p が存在します.

同じように「点 p を通るような，$x = 0, y = z$ という直線と平行な直線に関する 180 度回転変換」g_p と,「点 p を通るような，$x = 0, y + z = 0$ という直線と平行な直線に関する 180 度回転変換」h_p が存在します.

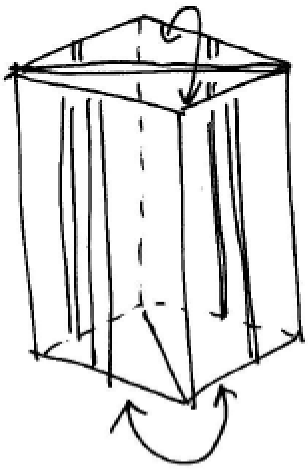


（図 15-1a）

そうすると，図 15-1a のような展開図が作れると思います！やった！形は直方体だと思うんですが，面のうちの４面には x 軸と平行な軸を持つような 180 度回転 f_p による折り返しで貼り合います．

残りの２面については，一つは g_p で，もう一つは h_p で斜めの線に関する折り返しで面を貼り合います．

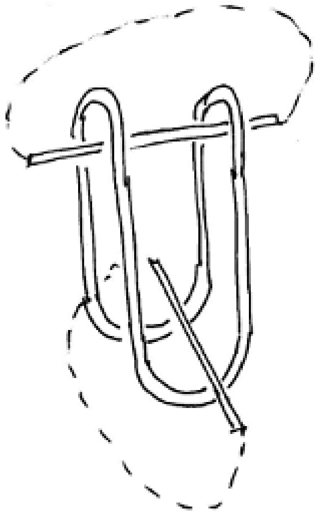
A：すばらしい！これは確かに Solvegeometry の展開図になっていそうですが，どうでしょうか．



（図 15-1b）

O：図 15-1b のように，まず斜めの線のところで面を張り合わせてみると，図 15-1c のようになります．15-1b の４枚の側面を張り合わせると，上の柱と下の柱

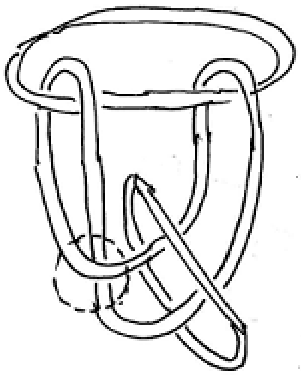
が輪状になるというのは，すでに何回も経験済みです．ただ，一点だけ気になることがあるのですが．



（図 15-1c）

A：なんでしょうか．

O：図 15-1c のように柱がつながったとして，それがサーストンの絵にならないんです．ひどく惜しいのです．図 15-1d のように左下にある交差点の交差が逆だと，サーストンの絵と同じものになることは確認できました．でもこうではないんです．



（図 15-1d）

A：あれま．本当ですね．まぁしかし，サーストンの絵と似た絵では実現できたということは一つの成果だと思います．