第２章

（第２章宿題１）半径 R の球面の曲率は $K = \frac{1}{R^2}$ で定められているものとする。球面上に描かれた円の半径 r を小さいものとして固定して考える。曲率 K が小さいとすると、球面上半径 r の円周の長さは $2\pi r$ よりおおよそ K に比例して短くなることを示せ。

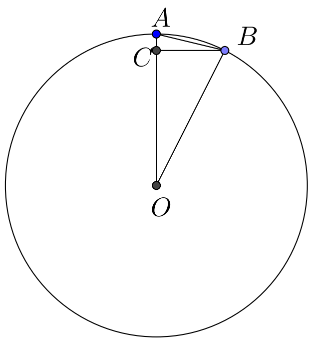
O：これは、幾何学っぽい設問ですね。計算をごりごりやればいい、という感じでしょうか。

A：そうだね、O 君主導でやってみてくれるかな。

O：頑張ります。まず、最初の状況は、半径 R の球面があるということですね。そして、そこに半径 r の円が描かれているという状況ですね。

A：そうだね。

O：球の中心と、半径 r の円の中心の両方を通るような平面で球を切って考えるのが筋がよさそうに思います。



図で、球の中心を O、円の中心を A とします。r は小さいと言っているので、角 AOB は鈍角と仮定できると思います。円上の点 B をとると、AB の距離が r ですから、点 B から OA へと垂線をおろして、その足を C とすれば、円周のユークリッド的な半径は BC ですから、円周の長さを計算すると $2\pi BC$ ということになります。これはいいですね。

A：一か所気になるところがあるけど、方針はいいと思うよ。

O:$AB = r$ だから、$r = AB = 2R\sin(\angle AOB/2)$ で、かつ $BC = R\sin(\angle AOB)$ ですから、この 2 つの式から $\angle AOB$ を消去すればいいですね。整理して書いて

みます。

$$\begin{aligned}
\sin(\angle AOB/2) &= \frac{r}{2R} \\
\cos(\angle AOB/2) &= \sqrt{1-\frac{r^2}{4R^2}} \\
(\text{円周}) = 2\pi BC &= 4\pi R \sin(\angle AOB/2)\cos(\angle AOB/2) \\
&= 4\pi R \frac{r}{2R}\sqrt{1-\frac{r^2}{4R^2}} \\
&= 2\pi r\sqrt{1-\frac{r^2}{4R^2}}
\end{aligned}$$

だいたい、$2\pi r$ より少し小さいことはわかります。

A：ちょっと待ってね、だいたいいいんだけれど、一か所直さないとね。というか、計算はもう少し簡単なんだよ。

O：どこがだめですか。

A：$AB = r$ と置いたところ。本文を読んでごらんなさい。球面に沿って半径 r を計る、と言っているでしょう？

O：あ、そうか。弦 AB の長さではなくて、弧 AB でなくてはいけませんね。そうすると、

$$R\angle AOB = r$$

ですね。そうすると、

$$(\text{円周}) = 2\pi BC = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$$

ですが、ここからどのように計算すればいいかがわかりません。

A：sin のマクローリン展開を使うといいね。

O：$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$ でいいですか。

A：うん、それを代入してみよう。

O：そうすると、

$$\begin{aligned}
(\text{円周}) = 2\pi BC &= 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right) \\
&\sim 2\pi R\left(\frac{r}{R}-\frac{r^3}{6R^3}\right) \\
&= 2\pi r - \frac{r^3}{3R^2} \\
&= 2\pi r - \frac{1}{3}r^3 K
\end{aligned}$$

これでいいですか。途中で近似式を使いましたが、たしかに K に比例する項ができました。

A：いいと思うよ。