第 3 章

（第 3 章宿題 1 ）ポアンカレの円板モデルにおいて、円板を「原点中心、半径 1 」においてあるとし、原点 O と点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ とを結ぶ双曲直線の長さを求めてみましょう。（縮尺を積分すれば長さが求められます。）

O：縮尺を積分すれば長さが求められるということなので、縮尺を 0 から $\frac{1}{2}$ まで積分してみます。

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-r^2}dx$$

ということですが、r の式を x で積分する意味がわかりません。

A：この式は「x が 0 から $\dfrac{1}{2}$ まで」と言っているけれど、これは円板モデルではどうなっているかな？

O：原点 O と点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ とを結ぶ双曲直線、という意味だと思います。

A：座標で書けるかな。

O：$(0,0)$ から $\left(\frac{1}{2},0\right)$ までですね。

A：あーだから、直線上の点を x で表してみて。

O：そういうことなら、$(x,0)$ で x の範囲は $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ です。

A：そうだね。そうしたら、r というのは「今いる場所から原点までの距離」だから？

O：$r=\sqrt{x^2+0^2}=x$ ということですか。そういうことならあとは積分の計算ですのでできます。

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{1}{1-r^2}dx &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\log|x-1|-\log|x+1|\Big]_0^{1/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}-0+0\right) \\
&= \frac{\log 3}{2}
\end{aligned}$$

できました！

A：計算はきちんとしているね。

O：部分分数展開の計算は好きなんです。

A：でもせっかくだから、なぜ縮尺を積分すれば長さが求められるのかを考えようね。

O：そういうのが僕にとっては難しいんです。

A：まず、区分求積法を覚えているかな。忘れていたら、今すぐ微積分の教科書を調べなさい。

O：原理は大体覚えていますが、きちんと言えるかどうかわからないので、調べながらでいいですか。

A：いいよ。

O：$f(x)$ を $a \le x \le b$ の範囲で定積分するときの公式で、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,(\cdots)$$

という感じですよね。

A：うん、そんな感じ。でも、これって 0 から 1 まで積分するときの話で、a から b までだと $\frac{1}{n}$ のところは $\frac{b-a}{n}$ になると思うね。

O：そうでしたか $\cdots$ 。

A：うん。というのは、$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた領域を縦長の細長い長方形の並びで近似すると、底辺が $\frac{b-a}{n}$ で高さが f(ナントカ) になるからね。「$\ldots$」のところは？

O：a から b までの区間を n 個に分けて、そこでの値を足すのだったと思いますが、式で書こうとすると、案外面倒だなぁということに気が付きました。a から b を n 等分する点を $a_1, a_2, \ldots$ としてよいのでしたら、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\,(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n))$$

という感じですよね。これでいいですか。

A：うん、いいね。細かいことを言うと、n を大きくすると、$a_1, a_2, \cdots$ も変わってしまうので、その点には注意が必要ということかな。正確に書くと、$a_j = ((n-j)a + jb)/n$ かな。これは、a と b を両端とする線分を $j : n-j$ に内分する点のことだね。

O：それで、縮尺を積分すると長さになる、ということの説明をお願いします。

A：うん。区分求積法の大切なところは「区間を n 個に区切る」ということだね。いまは、$(0,0)$ から $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ までの区間を n 個に区切ります。区切る点に名前を付けて、$A_1, A_2, \ldots$ とします。

O：区切る点の座標を計算しますか？

A：$A_1, A_2, \ldots$ の座標を具体的に求めることもできると思うけれど、それは後で気が向いたら考えることにします。ともかくそれで、区切った一つ一つの小さな区間の（双曲平面の中での）長さをもとめましょう。

O：長さ $\frac{1}{2}$ の線分を n 等分したのなら、一つは $\frac{1}{2n}$ ですね。

A：うん、（ポアンカレ円板という）地図の上ではね。双曲平面の上ではどうなるかな。

O：短い線分とはいえ、地図の縮尺は一定ではないですよね。

A：そうなんだ、そこが問題なので、最後は n を無限大に飛ばして極限を考えるんですね。とりあえず、短い線分の端の点での縮尺を使って近似することにしよう。

O：では A_jA_{j+1} という線分で考えることにします。縮尺は A_j における縮尺を用いることにします。えーとではまず A_j の座標を求めて r を計算する感じでしょうか。

A：うん、具体的にはそうなんだけど、今は概念と式の意味で進めていきたいので、O 君が計算したい気持ちはわかるけれど、

$$A_jA_{j+1}\text{の長さ} = \frac{1}{2n}(A_j\text{での縮尺})$$

としておこう。

O：はい。

A：この式の、$\frac{1}{2n}$ のところは、$\frac{1}{2}$ の長さの線分を n 個に分割したということだったから、ここを $\dfrac{\frac{1}{2}-0}{n}$ と変形して、$\frac{b-a}{n}$ のような形にしておくけど、これはいいかな。

O：はい、大丈夫です。

A：そうすると、A_jA_{j+1} の長さの総和が求める長さということになるね。

O：そうですね。

A：総和を $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}$ と書くことにすると、求める長さは $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(A_jA_{j+1}\text{の長さ})$ ということになるので、これを上の等式を合わせてくれるかな。

O：はい、

$$\sum_{j=1}^{n}(A_jA_{j+1}\text{の長さ}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}-0}{n}(A_j\text{での縮尺})$$

ということですが､､､ああ、わかりました。これが

$$\int_0^{1/2}(\text{縮尺})\,dx$$

ということになるのですね。

A：そのとおり、これで、縮尺を積分すると長さが求められることは示せたことになるね。

O：具体的に区切る点 $A_1, A_2, \ldots$ を計算しないほうがすっきり説明できるんですね。

A：そのあたりは嗅覚の問題だね。要らなそうだったら手を抜くのが最善なんだけど、簡潔に説明できるかどうかは計算先々まで見通す力が必要かもね。

（第 3 章宿題２）原点を中心として、半径１の円板の内部にある２つの点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ について、この２点を通る双曲直線の式を求め、そのような双曲直線がただ一つに定まることを示してみましょう。

O：これは $\cdots$ どうやって求めるのでしょうか。

A：それを考えるのが宿題なんだよ。

O：双曲直線は円弧ですから、その中心と半径が求まればよい、と考えればよさそうです。

A：そのとおりだね。

O：円の中心を (X, Y) として半径を R としてみます。まず、この円弧は２つの点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ を通るということから、式が求まります。

A：やってみて。

O：えと $\cdots$ 。点 A と円の中心との距離が R ということですよね。

A：ん $\cdots$ まあね。（円の方程式、忘れちゃってるのかなぁ。）

O：（なんかまずいこと言ったかな？）円の中心は (X, Y) ですから

$$\sqrt{(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2} = R$$

ですね。

A：ま、いいか。それで？

O：点 B のほうも同じように式を立てることができますから、

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R^2 \tag{1}$$

$$(X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = R^2 \tag{2}$$

ですね。あ、円の方程式ですね。どうしてこういう簡単なことに気が付かないんだろう！ ともかく、これで、X, Y, R について解けばよいわけですか。

A：うーん。計算を始める前にちょっと勘を働かせてごらん。

O：勘ですか？何かまずいことでも？

A：未知数の個数はいくつかな？

O：X, Y, R の 3 つですね ⋯ あ、そうか。式が 2 つしかありませんね。これでは答えがきちんと求まらない、という勘を働かせよ、ということですか。

A：そのとおり。

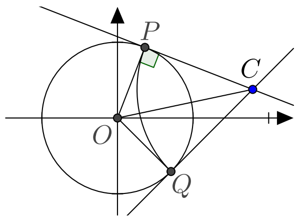
O：使っていない条件は何かなぁ ⋯ 2 点を通る、というのは上に書いた式なので、あとは「双曲直線である」ということですか。

A：そうだね。円弧が双曲直線である条件はなにかな。

O：単位円周に直交するということです。

A：うん。それを図に書いてみよう。

O：こんな感じですか。



A：この、点 C は何？

O：求める円弧の中心ですから、座標は (X, Y) です。

A：直交条件が図に書き込まれているけれど、これを式にするとどうなるかな。

O：三角形 OPC が直角三角形であることを使うのではないでしょうか。角 PAC を θ とかおいてみましょうか。三角関数で何とかなるような気がします。

A：図の中でわかっている長さを書き込んでみるといいと思うよ。

O：OP は 1 ですよね。これは単位円周の半径なんだから。

A：うん。それから？

O：CP は円弧の半径だから R ですね。あとは OC がわかるとよさそうですが、ここで tan とか使いましょうか。

A：ここで落ち着いて考えてごらんよ。すぐわかるから。

O：そうでしょうか ⋯・(数分考える)・・

A：(しばし待つ)

O：わかりました！ 2 点間の距離ですね。

$$OC^2 = X^2 + Y^2$$

です。ということは、三角形 OPC で三平方の定理を使うと、

$$1 + R^2 = X^2 + Y^2 \tag{3}$$

が得られます。未知数の個数が 3 個で式も 3 つ得られましたので、解きに行きます！

A：方程式を解くときに O 君は目を輝かせるね (笑)

O：楽しいですから！

式 (1) と式 (3) から R を消すのが筋がよさそうです。

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = X^2 + Y^2 - 1$$

X^2 と Y^2 とが消えることがわかります。

$$-2Xx_1 + x_1^2 - 2Yy_1 + y_1^2 = -1$$
$$2x_1X + 2y_1Y = 1 + x_1^2 + y_1^2$$

同じように考えると、式 (2) と式 (3) から

$$2x_2X + 2y_2Y = 1 + x_2^2 + y_2^2$$

も得られることがわかります。この 2 つの式から X, Y について解くことができます。

A：いいね。連立方程式を解いてみて。

O：はい。（しばらく計算。）途中の計算を省きますけれど

$$X = \frac{(x_1^2 + y_1^2 + 1)y_2 - (x_2^2 + y_2^2 + 1)y_1}{2(x_1y_2 - x_2y_1)}$$
$$Y = \frac{(x_2^2 + y_2^2 + 1)x_1 - (x_1^2 + y_1^2 + 1)x_2}{2(x_1y_2 - x_2y_1)}$$

が得られます。あとは、$1 + R^2 = X^2 + Y^2$ ですから、、、

A：R が求まることを言えば十分だよ。

O：いえ、最後まで計算させてください。（しばらく筆算。）

$$R^2 = \frac{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1^2 + y_1^2 - 1)(x_2^2 + y_2^2 - 1)\}}{4(x_1y_2 - x_2y_1)^2}$$

求まりました！右辺は正の数になりますので、正の平方根を取ることができます。

A：力作だね。どうやって因数分解したの？

O：気合です！

A：すごいね。求めるべき双曲直線、つまり円弧なわけだけれど、これは、2 つの点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ が与えられれば、この式で求められるというわけだね。

O：そういうことになります！

A：分数の形をしているけれど、分母が 0 になることはないのかな。

O：それは $\cdots$ あるかもしれませんね。分母は $x_1y_2 - x_2y_1$ ですが、これは 0 になるかもしれません。

A：２点 A, B がどのような位置関係の時にこの分母が 0 になるかな。

O：それもそうですね、そういうことがわからないと計算が終わったとは言えませんね。ちょっと時間をください。$x_1y_2 - x_2y_1$ ですよね。

A：x_1, y_1 を左辺に寄せてごらんよ。

O：はい。$x_1y_2 = x_2y_1$ なので、$\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$ です。あれ、思いほのかきれいな式ですね。あ、でもこれは分数の形で分母が 0 になるかもしれないからダメですよね。これ、どう考えるのですか。

A：式変形はそれでいいんだけれど、0 で割るかもしれないと思うからキモチが悪いんで、「比」の形で書けばいいと思うよ。

O：つまり $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ ということですか。これはベクトルの平行ですね！

A：そうだね、ベクトルの平行だと思うと、点 A, B はどういう位置関係かな。

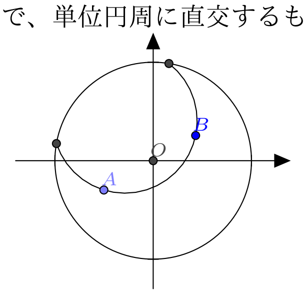
O：ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ とが平行だとすると、３点 O, A, B が一直線上に並んでいると思います。

A:そうだね。$\overrightarrow{OA} = \vec{o}$ や $\overrightarrow{OB} = \vec{o}$ の場合も含めて考えても、その結論は正しいね。このときは、A, B を通る双曲直線はどうなるだろうか。

O：そうですね、それが問題ですが $\cdots$ 絵に書いてみていいですか。

A：それがいいと思うよ。

O：こんな図になりますが、どうなんでしょう。こういう２点を通るような円弧で、単位円周に直交するものはあるんでしょうか。

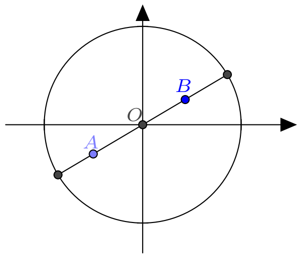


A：双曲直線の定義をよく思い出してみるといいと思うよ。

O：双曲直線とは「単位円周に直交する円弧」ですよね。

A：それと？

O：そのほかにもあるんですか？ああ、単位円周の直径というのですね。ああ、そうか。３点 O, A, B が同じ直線の上に並んでいるということは、一つの直径の上に乗っているということですね。



A：そういうこと。

O：それで、直径は双曲直線なので、この直径が求める双曲直線だということでいいでしょうか。

A：はい、それで完璧な解答だね。

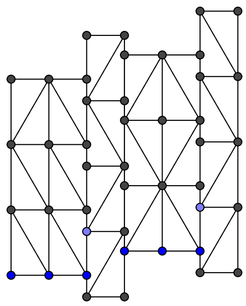
（第 3 章宿題３）90 度、60 度、30 度の角度を持つ三角形はユークリッド平面に敷き詰められることを図で示してください。

O：90 度、60 度、30 度の角度を持つ三角形をいっぱい作って並べればよいということですね。厚紙で作ってみます。

A：うん、そうして。

（しばらくして）

O：先生、これは結構いろいろな敷き詰め方がありますね。ソフトウエアを使って図を描いてみましたが、三角形の向きやずらし方などいろいろありうるので、組み合わせは無限にあると思います。



（図）

A：おお、なるほど。これは良いね。「敷き詰められることを図で示してください」と言われているのだからこれで正解だ。

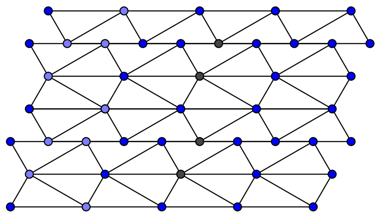
O：この方法で、いろいろな敷き詰め方を作れると思いますが、そのどれもが正解ですか。

A：うん。

O：一番きれいな並べ方、のような観点はないですかねぇ。

A：あってもいいと思うよ。でも上の絵でも結構きれいだと思うけどね。

O：ではこういう並べ方で行きたいとおもいます。



（図）

A：結局想定解はでなかったな。

O：え、そうなんですか。

（第３章宿題４）90 度、60 度、25.71 度の角度を持つ三角形が双曲平面に敷き詰められるという話がありましたが、この３つ目の数字を厳密に求めてください。

O：この問題が言っていることはつまり「２５．７１度というのは厳密ではないので、その正しい値を求める」ということですね。

A：そのとおり。

O：25.71 という数字を適当に何倍かしてみ分数を当てはめる、というのはどうですか。

A：実践的には有用な方法だけどね、ここはひとつ「理屈で考えて導出する」ことにチャレンジしてほしいんだけど。

O：（さっさっと計算して）$360 \div 25.71 \sim 14.002333$ なので、360/14 度だと思うんです。有効数字４桁をみてもそう違っていないと思います。

A：うん、だからさ、理屈で考えようね。

O：はい。では、前の宿題と同じように、三角形を作って並べてみればいいでしょうか。

A：どうかな。

O：どうかな、ってダメなんですか。（紙を取り出して三角形を書き始める。）おやっ？ この三角形は作れませんね。三角形の角のうちの２つが９０度、６０度だと、もう一つは自然に３０度に … あっ（笑）‥ 当たり前ですね。三角形の内角の和は１８０度ですもんね。

A：ふふ … 。ユークリッド幾何ならね。

O：そっかー双曲幾何ですから、こういう変な角度の三角形があるのでした。忘れていました。双曲幾何での三角形の内角の和の公式から３つめの角度が求まるのではないでしょうか。

A：そういう線で解決をしようというのなら、公式を思い出してごらん。

O：

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi - \triangle ABC$$

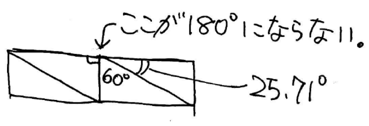
でした。この式で π は 180°のことですが、 $\angle A$ と $\angle B$ がわかったとして、$\angle C$ を求めるのには、$\triangle ABC$ が求まればいい、という感じですか。

A：まぁ、そういう道筋もあるかもしれないけどね。

O：ダメですね。双曲三角形の面積 $\triangle ABC$ を見つけるほうが難しいですね。

A：では、どうする？

O：実際にそういう三角形があるとして、敷き詰めてみようかと思います。図 3-10 のような並べ方で敷き詰められると先生は言っていますが、まずは宿題３で並べた方法でいけるかどうかを試してみます。



（図）

（しばらく図をにらんだまま動かない O 君。）

A：どうですか。

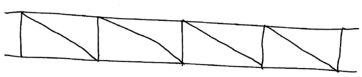
O：なんだか全然ダメですね。

A：ダメな理由はわかりますか？

O：なんとなくなのですが、今考えているこの図、ここのところが、足しても１８０度にならないんです。９０度＋６０度＋２５．７１度が１８０度にならないからダメなのではないかと。

A：ここの角度を足すと１８０度になることがどのように大事なんですか？

O：ちょっと考えさせてください。（しばらく考える。）こういう説明でどうでしょうか。この並べ方だと、要するに細い帯を作ってそれを敷き詰める感じでした。帯が敷き詰められるためには、帯のヘリはまっすぐでなければいけません。つまり１８０度だということです。これで説明になっていますか？



A：うん。その通りだね。１８０度にならない理由ははっきりしていますか？

O：（ちょっと考えて）あっ‥。これはこの三角形の内角の和なんですね。双曲幾何で考えているということから、この和は１８０度より小さくなります。

A：１８０度にするためには何か工夫がありますか？

O：この敷き詰め方だと、どうやっても１８０度にならないのですが、逆向きに考えてちょっとわかりました。

A：おお。説明してください。

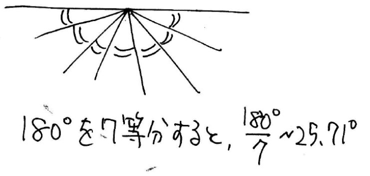
O：三角形の角度が１８０度の何分の一とかになっていれば、うまく組み合わせれば「併せて１８０度」になるのではないかと思いました。

A：それはいい発想だね。その線で解決できるかな。

O：今考えている三角形の角度のうち、２つは９０度と６０度であることが分かっていて、これは１８０の約数です。さっき、$360 \div 25.71 \sim 14.002333$ という計算から、３つめの角度は 360/14 度ではないかと推測したわけですが、これは 180/7 度ですから、約数というと少し変ですが、１８０度の約数になっています。

A：それで１８０度を作れるかな。

O：（いろいろ組み合わせをかんがえてみる）そうですね。結局、三角形の角度の和が１８０度や３６０度にならなければいけないわけです。９０度、６０度、３０度だと、９０＋６０＋３０＝１８０ですからこれはいろいろな敷き詰め方ができるわけです。９０度、６０度ともう一つが３０度より小さいということになると、「９０、６０、もう一つの角」を合わせて１８０度にできるという条件はかなり絞られると思います。一つは１８０度の約数になる場合、もう一つは３０度か６０度か９０度の約数になる場合ですね。



A：なかなか良い考察だね。

O：後者だとすると自然と１８０度の約数になりますから、ここは「１８０度の約数」であることが条件ということになって、約２５．７１度ということから 180/7 度であることが従います。

A：正解です。