第 6 章

（第 6 章宿題 1）　積空間の定義を調べ、$E^1 \times E^1$、$S^1 \times E^1$ を図示してみよ。

O：積空間の定義なら言えます！集合 A, B の積集合 $A \times B$ は

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

です。

A：そうだね。

O：本文中で気になったことがあったのです。E^1 は数直線の意味だという内容があったと思うのですが、数直線というのは実数の集合のことですから $\mathbb{R}$ と書くものではないでしょうか。

A：それはいい質問だね。集合としては同じものです。

O：集合として同じだったら同じと考えてよいでしょうか。

A：だいたいは同じと考えてもいいのだけれども、数学の世界では書き分ける理由があるにはある。

O：どういうことでしょうか。

A：$\mathbb{R}$ と書いたら「実数の集合」ということで、多くの場合はこの集合上で和や積と言った代数演算を使えるようなものとして考える。

O：まぁそうでしょうね。では E^1 のほうは？

A：E^1 は 1 次元ユークリッド空間の意味なので、この集合上の任意の 2 つの要素 a, b のあいだには「2 点間の距離」である $|a - b|$ が定まっているということをメインにして考える。

O：空間での距離を考えるというのは、距離空間という考え方ですね。

A：そうそれ。

O：和や積を考えるというのは環や体といった代数の話になるとおもいます。つまりこういうことでしょうか。実数の集合を環や体といった代数としてとらえるときには $\mathbb{R}$ を使い、距離空間としてとらえるときには E^1 を使う、ということでいいでしょうか。

A：そういう理解で大丈夫だと思うよ。こういうふうに、集合としては同じものでも異なる数学の概念と結びつけて考えることによって、異なる概念であるかのように扱うことができる。こういうのを「構造」と言ったりする。つまり実数

の集合には「代数構造」を考えたり、「距離構造（位相構造ともいう）」を考えたりすることができて、それぞれの場合に $\mathbb{R}$ と E^1 とに記号を使い分けていると言える。

O：なんとなくわかりました。では $E^1 \times E^1$ に行きたいと思います。これは積集合の定義から考えていいですか。

A：そうしてください。

O：そういうことだと、

$$E^1 \times E^1 = \{(a, b) \mid a \in E^1, b \in E^1\}$$

となりますね。おや、これは平面ベクトルの集合とおなじではないですか。座標平面と言ってもいいと思います。つまり $\mathbb{R}^2$ ですね。

A：はい、正解。でも今言ったばかりの「構造」についても少し考えてみましょうか。

O：$\mathbb{R}^2$ というと、ベクトルの集合で、ベクトルの和や定数倍というような代数計算ができるもの、という理解でいいでしょうか。

A：いいと思います。距離構造はどうかな。

O：平面ベクトルの長さが 2 点間の距離になっていますから、それではどうでしょうか。

A:それで大丈夫です。だけど、ここでちょっと工夫して、E^1 の距離から $E^1 \times E^1$ の距離を決めることができるかどうかを少し考えてみてくれるかな。

O：結果的に座標平面の距離が与えられればいいですか。

A：そうだね。a と b の E^1 での距離 $|a-b| = d_1(a, b)$ と書いたとして、$E^1 \times E^1$ の距離を与えるにはどうすればいいかということだね。

O：平面での (a_x, a_y) と (b_x, b_y) の距離は $\sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$ ですから、これを $\sqrt{|a_x - b_x|^2 + |a_y - b_y|^2}$ と書き直すと、

$$\sqrt{d_1(a_x, b_x)^2 + d_1(a_y, b_y)^2}$$

でいいでしょうか。

A：うん。これは一般的な公式を与えているともいえる。つまり、距離が定められているような二つの空間の積空間にも距離を考えることができるということを確認できればいい。実は、ただの $d_1(a_x, b_x) + d_1(a_y, b_y)$ という式でもやっぱり距離を定めることができたりするのだが、そういう話は位相空間の教科書に譲ることにしよう。たとえば太田春外著「はじめよう位相空間」を勧めておきます。

O：そういうことで、$E^1 \times E^1$ というのは座標平面だということでいいでしょうか。

A：そうそう、そっちが結論でした。危うく忘れるところだった。はい。では次は $S^1 \times E^1$ はどうかな。

O：これが、教科書とかだとアニュラスだと書いてあって、何となく理由はわかるんですけれどきちんと説明しろと言われるとなんかうまく言えなくて。

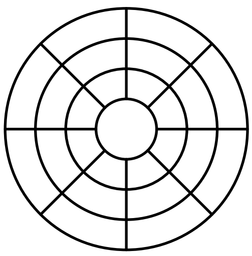
A：アニュラスね。そうなんだけど、雰囲気としては円筒のほうが近いんだけどな。

O：円筒ですか ····

A：アニュラスと言えば、こういう図（6-1a）だけれど、これが「何となく理由がわかる」というのはどういう感じなのかな。

（6-1a）

O：よく見る説明は、このアニュラスにこういう（図 6-1b) 筋が入っている絵があって、これが座標軸になっているというか、円周 S^1 方向の座標軸と、放射方向の座標軸があって、これで積空間になっている、というような説明です。



（6-1b）

A：なるほど。極座標だね。

O：そうですね。S^1 方向の座標軸は偏角 θ の軸で、放射方向はノルム r の軸だと言えると思います。でもこれだと、r が実数全体にわたらないじゃないですか。この絵なら例えば $1 \leq r \leq 4$ だったりして、r の範囲があるわけじゃないですか。だから $S^1 \times E^1$ という感じではないんですよね。

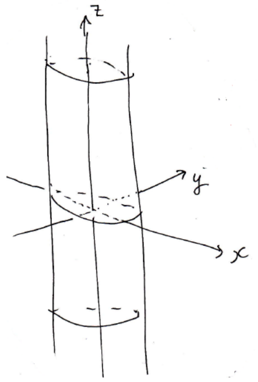
A：あーなるほど。宿題の回答としては今言ったようなことでいいと思うよ。腑に落ちない理由もわかるね。r の範囲が閉区間（両端を含むような区間）だと、ちょっと E^1 と同じとは思えない、という数学的感覚もあるよね。せめて $1 < r < 4$ みたいな開区間にしてくれればいいのになぁとも思ったりする。

O：開区間は数直線 E^1 と位相同型ですからね [1]。それにしても、$\times E^1$ と言っているのに、r の範囲が有限の区間だというのがイヤなんですよ。

A：そういうことなら「円筒」で考えればいいと思うよ。xy 平面に単位円を書くとするじゃない。

O：はいはい。

A：そのまま z 軸もあると思って、その単位円を z 軸方向にくまなく移動して長さ無限大の円筒を作るんだよ。（図 6-1c)



（6-1c）

O：これが $S^1 \times E^1$ だということですか。ああ、何か $H^2 \times E^1$ と成立過程が似てますね。$H^2 \times E^1$ だと、xy 平面上にまず双曲平面 H^2 を考えて、それを z 軸方向に厚みをつけて考えてますよね。それと同じ発想ですか。

A：そうそう。まさにそれ。

O：そういうことならよくわかります。これだと？円周方向の θ 軸は xy 平面に平行な平面に沿ってあって、E^1 方向の r 軸は z 軸そのものですね。

A：そのとおり。これがこたえだね。

O：わかりました！

（第 6 章宿題 2）　双曲正 8 角形で内角が直角であるようなものが図示されているが、その頂点の座標を求め、双曲面積を求めよ。

O：これは座標を計算する問題ですね。

[1] 位相同型の定義はたとえば、松本幸夫著「多様体の基礎」東京大学出版会を読むとよい。

A：張り切ってるね。

O：計算は好きなので！

A：では式を立ててみましょう。

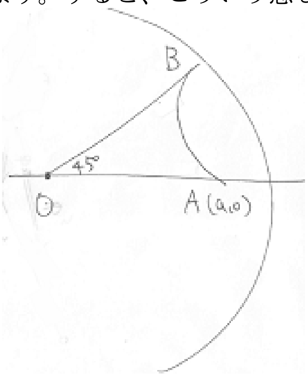
O：正 8 角形は原点を中心に対称性がありますので、頂点の 1 つを求めれば、ほかの頂点は回転で求めることができます。ですので、頂点の 1 つを求めることを目標とします。

A：いいと思うよ。

O：頂点の 1 つが x 軸に乗っているものと仮定することは構わないと思うのですが、良いでしょうか。

A：OK です。

O：ではそれを $(a, 0)$ とします。それで、a に関する式を立てればいいわけですが、ちょっと考えた感じでは、正 8 角形を 8 つに分割するのがいいのかなと思います。すると、こういう感じの絵になると思います。



（図 6-2a）

A：角度がどうなるかということだね。

O：そうですね。まず、点 A が x 軸上にある頂点の 1 つだと思っています。点 B はその隣の頂点の意味ですから、ユークリッド長で $OA = OB$ となるはずです。あと、正 8 角形ということから $\angle AOB$ は 45 度になります。そうすると、B の座標は

$$B = \left(a\cos\frac{\pi}{4}, a\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

となります。

A：そうだね。

O：特定の 2 点を通る双曲直線の式を求める公式があったとおもいますので、それを使うと、双曲直線 AB の式が出せると思います。実際に、円の中心を (X, Y)

とすると

$$X = \frac{a^2+1}{2a}$$
$$Y = \frac{(\sqrt{2}-1)(a^2+1)}{2a}$$

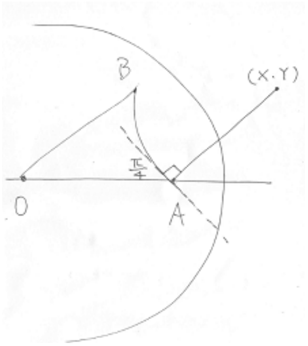
となります。円の半径を R としたとき、$1+R^2 = X^2+Y^2$ の公式がありますから R も求まります。

A：おお。それで？

O：それでどうしましょう。もう一つ式を立てなければいけませんね。使っていない条件は何でしょうか。

A：正 8 角形ということで、$\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ は使ったよ。

O：そうですよね。（問題文を読み直す）内角が直角だというのをまだ使っていません。図をもう一つ書かなければいけませんね。



（図 6-2b）

A：うん、この図でいいね。

O：双曲直線 AB の円の中心を O' とすると、$\angle O'AO$ は 135 度ですね。あそっか。ベクトル AO' を考えればいいのかな。これ、45 度の角度ですよね。O' の座標はわかっているから

$$\overrightarrow{AO'} = \left(\frac{a^2+1}{2a} - a, \frac{(\sqrt{2}-1)(a^2+1)}{2a} \right)$$

と求まります。この偏角が 45 度だから $\dfrac{a^2+1}{2a} - a = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(a^2+1)}{2a}$ ですね。あれ、分母を払うと 2 次方程式じゃないですか。$a^2 = \sqrt{2}-1$ ですね。a は正の数としているので、

$$a = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

と求まりました！頂点の一つは $(\sqrt{\sqrt{2}-1}, 0)$ で、あとはこれを回転で回していけばいいということで、式までは計算しなくていいですか。

A：はい、いいことにしましょう。あとは双曲面積だね。

O：これは ….? 頂点の座標から計算する筋でしょうか。

A：それを考えるのが O 君の役割だからね。

O：ちょっと時間をください。（しばらく考える。）あ、三角形の内角の公式ですね。（図 6 - 2a）ですか。3 つの角度がどれも $\frac{\pi}{4}$ ですから

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi-\triangle OAB$$

だから $\triangle OAB=\frac{\pi}{4}$ ですね。これが 8 つですから $\frac{\pi}{4}\times 8=2\pi$ が双曲正 8 角形の面積ですか。

O：はい、正解です。

（第６章宿題３）　直角正八角柱について、各面が平面であることを確認せよ。

A：この問題は「そもそも平面とは何か」という問題をはらんでいますので，ここで完全に解決できるわけではありませんが，ともかく考えてみよう．

O：そうなんですか。まず，直角正八角柱は面が 10 ありますが、上面と底面は同じ形をしていますから一緒に考えることにして、側面が 8 つあるのも同じ形？（でいいですか？）をしているとおもいますので、この 2 種類について考えることにします。

A：考える前に問題を整理するのはいいことだね。まず上面のほうはどうかな。

O：$H^2\times E^1$ では、水平面は双曲平面で、垂直方向は数直線だという説明でしたから、水平面は平面でいいと思います。

A：いいと思うよ。

O：側面のほうも似たような説明になってしまいますが，まず，側面を特徴づけたいと思います．底面の正八角形の辺を下辺として，上面の正八角形の辺を上辺として，あとは垂直な 2 つの辺からなっているような面です．これは上辺と下辺が双曲直線ということなのでマッスグな線で，それを垂直方向に動かしたものなので，全体として平面になると思います．

A：理解はそれでいいと思うね．あとは「平面とは何か」というそもそも論を考えてみて，その定義に今言った説明が合うかどうかを考えてみるのがいいかな．さて，では平面とは何だろう．

O：平面はまっすぐな面？あれ？まっすぐでは変ですか？平らな面ということですね。曲率 0 でいいでしょうか。

A：何曲率が？

O：あ、そうか。ガウス曲率とか平均曲率とかありますからね。

A：そういうこと。今ここでこれらの曲率を思い出すことはしないけれど[2] そういう「いかに曲がっているか」という量を計算してみるというのが一つの考え方．もっとも，今は空間自体が曲がっていると考えられるわけだから，その中での「まっすぐ」や「平ら」の意味がひつようになるね．

O：そういえば，曲面論では，直線とは言わずに測地線という言い方をします．僕はこれをマッスグの定義だと考えているのですが，そういう感じのことでしょうか．

A：そういうこと．でも，測地線の話から初めて平面の話をキチンと済ませようとすると難しい話になってしまうので，ここではやめておこう．

O：今は、どういう感じで行くのでしょうか．

A：あまり決定打はないんだけれど，まず「平面は直線が集まったものである」という前提で考えてみるのはどうかな．

O：さっきは，双曲直線を垂直方向に平行移動した面なので平面，という考え方をしましたが，何となくこれは危ういような気もします．

A：それはどうしてかな．

O：カーテンのように波打っているような曲面を思い浮かべたからです．つまりカーテン面は直線を平行移動してできる面だと思いますが，これは平面ではありません．

A：そうだね．

O：直線を「マッスグに平行移動する」ことが重要かと思います．今は双曲直線を垂直方向にマッスグ平行移動したので「全体として平ら」であると言っていいように思います．

A：うん，そういう理解でいいかな．

[2]参考：小林昭七著「曲線と曲面の微分幾何」，裳華房