

第7章

(第7章宿題1) 本文中図5の左図を連続的に動かして、図5の右図の形にせよ。

O: これは実力行使でやってみるしかないでしょうか。

A: たぶんそうだね。その前に、3Dプリンタで作ってみたものがあるので、見てみて。

(写真7-1, 準備中)

O: おお。こうやって手にできるとわかりやすくいいですね。

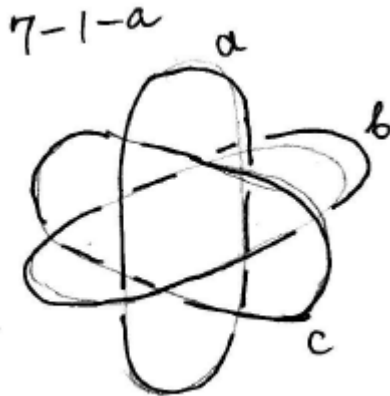
A: これはどちらかという図5の左図のような感じだね。三つの楕円形の輪を互いに直交する向きに置いてみると図5左と同じようになる。それがこのモデルだね。

O: (いろいろといじってみて) そういうことですね。まずは図5を紙にコピーしてみます。あーこの作業は面倒ですね。本にある結び目を取り込めるアプリが欲しいです。

A: 現在、絶賛開発中です(草)

O: これはずいぶん3次元的な見取り図ですね。あちこちで交差点がみえますので、絡み目の絵としてはかなりわかりにくいですね。

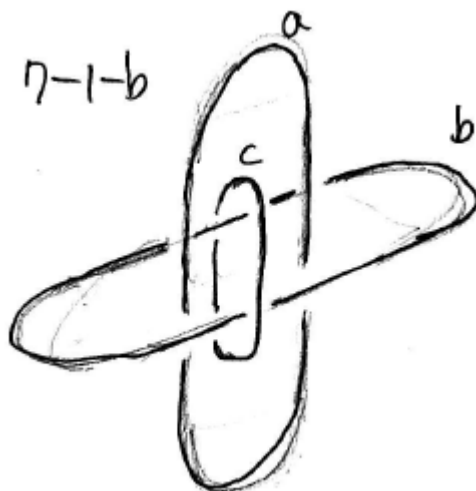
A: まずは成分に a, b, c と名前を付けてみよう。雰囲気としては a は上から下へ, b は手前側の左下から奥側の右上へ, c は手前側の右下から奥側の左上へ行っている感じだね。



(7-1a)

O: そこで、どうしますか。

A: じゃあ、最初はちょっと僕がリードしようか。まず c をすごく小さい輪にする。

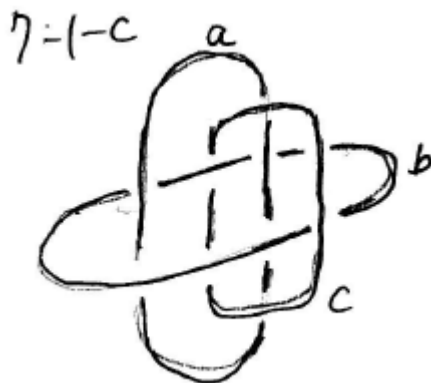


(7-1b)

O: これだけでもずいぶん状況が整理されますね。 b は水平な長円の輪で、その真ん中を縦方向に長円 a が突き抜けているような感じです。

A: この絵から、成分 c を右側に広げる。この作業をしながらできるだけ平面で絡み目の図式っぽくなるようにする。

O: こういう感じですか。



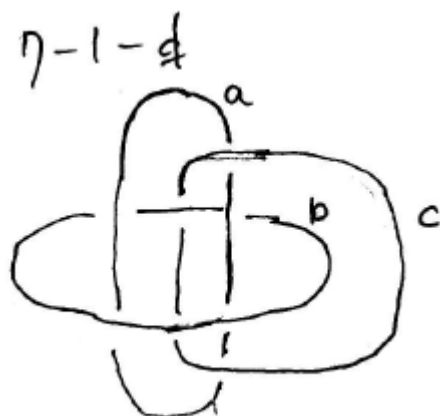
(7-1c)

O: 絡み目の移動などの作業が簡単にできるアプリがあるといいんですけどね。

A: いま作り中だ！なかなかできないけど。

O: これだったら、成分 c をもう少し右側へ広げててもよくありませんか。

A: よさそうだね。やってみて。



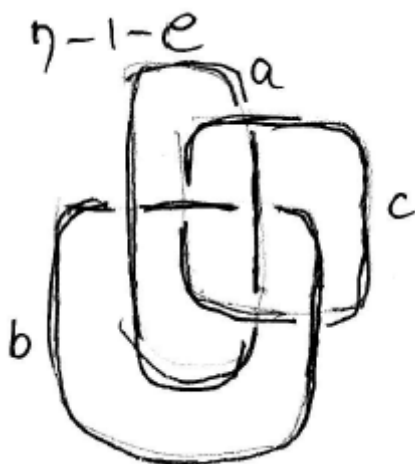
(7-1d)

O: こんな感じになりました.

A: おお, いいね. 図も普通の絡み目の図式のような感じになってきた. この次どうすればよいか, 作戦を立ててくれるかな.

O: そうですね今みたいに輪を広げるのがよさそうですが, 成分 b の下側が動かせそうな感じです. 成分 b の下半分を下側に引っ張ればどうでしょうか. 絵をかきなおしてみます.

A: そうしてみて



(7-1e)

O: こういう感じになりました. どうでしょうか.

A: できたね.

O: できてますか? できてるかな? すぐにわかりますか?

A: アンダークロッシング (下をくぐる) とオーバークロッシング (上をまたぐ)

のとを調べてみるとわかるよ。

O: そうですね? あ, どの成分についても「上, 下, 上, 下」という順番でほかの成分と交差していますね. これはボロミアン環の絵を同じものです. ということはこれは図5の右のものと同じということですか. できましたね.

A: おつかれさま.

(第7章宿題2) 双曲 X Line 宇宙の展開図を「60度正六角柱」からも作ることができる. その方法を考えよ. 「60度正六角柱」とは「底面が内角60度の双曲正六角形であるような角柱」である. このようにしてできた宇宙は直角正八角柱から作った宇宙とは別の形だが, やはりサーストンの絡み目の絵(図9)の二重分岐被覆になっている. この場合ザイフェルト膜の絵を描けるか?

A: まず, 60度正六角柱の絵をかいてみよう.



(図 7-2a)

O: そもそも内角60度の双曲正六角形を書いてみたほうがいいでしょうか.

A: いや, ここではいいや. 大事なことだけ抑えておこう. まず, 内角60度の六角形だから内角の和は360度だね.

O: はい. ユークリッド幾何では六角形の内角の和は 4×180 度でしたから720度ということになります. 内角の和はユークリッド幾何の場合の半分しかないので, これは双曲幾何が必要ということになりますね.

A: さて, では触ってはいけない柱をこの六角柱に書きこんでみよう.

O: サーストンの絵をみると縦線が6本あるので, それが六角柱の側面に対応しそうですね. 書きこんでみましょう.



(図 7-2b)

A: そうすると, 柱面(側面)6つのすべてに柱が来ることになって, 正八角

柱の時のような「柱のない側面」がなくなるね。

O: はい。ともかく、柱の両側は貼り合わせことになりますから、この側面だけを先に貼ると、上面と下面が残って、6本の縦の柱が残ることになります。

A: いいかどうかはすぐにわからないけれど、上面と下面にも柱をひとつつけてみようか。ただし、側面にある柱とぶつからないようにだよ。

O: 頂点から頂点でどうでしょうか？



(図 7-2c)

A: いい感じ。確かめてみるかな。

O: まず6本の柱は2本一組になってつながって3つの輪になりますね。

A: 上面の柱や下面の柱は輪になることが確認できますか？

O: 上面の双曲正六角形の6つの頂点はすべて同じ点に合流するので大丈夫だと思います。



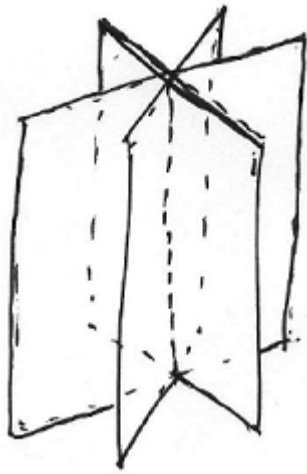
(図 7-2d)

A: 60度が6つ集まって360なので、キレイに貼り合っているんだね。

O: 展開図はこれでいいということでしょうか。次にはザイフェルト膜ですが……

A: 側面陵というか、縦の6本の辺がザイフェルト膜の「交線」になるのかな。

O: 8角柱の時の作業を復習しながら考えてみます。縦の6本の線を境界とするザイフェルト膜1本の線に集まる感じでしょうか。縦線のところだけを見るとこんな感じではないかと思います。



(図 7-2e)

A : これで，上部と下部で縦線がつながると

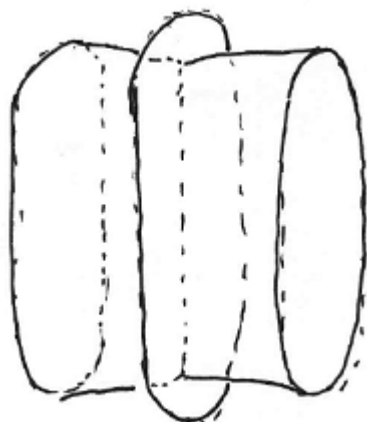


(図 7-2f)

O : これに面が貼ればいいんですけど．どうでしょうねえ．

A : 真ん中の輪についてはまっすぐそのまま張ればいいよね．両側のは，(図 7-2-e) のかたちになるように注意しなければいけないよ．

O : そうするとこういうことですか．



(図 7-2g)

A: 真ん中のところは交差しているということだね.

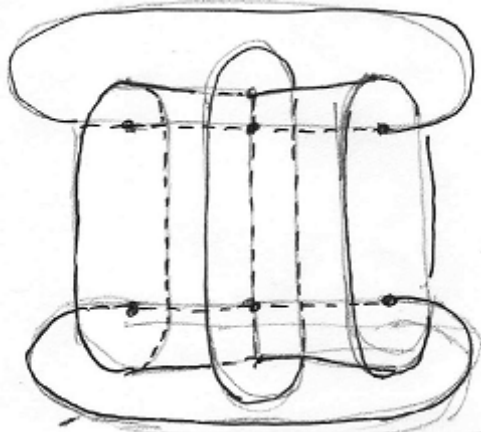
O: そういうことだと思います.

A: 筒型のものが真ん中の板を突き抜けているような形だと思うのだけれど、真ん中の板を突き抜けると同時に自分自身も交差してしまっている。これで、本当に「面」になっているのか、わかりますか.

O: えーどうでしょうか。確かに、自分自身が交差してしまっているところが一つの面になっているかどうかは少し微妙な感じもします。ですが、曲面の縁があらわれているわけでもないですし、大丈夫なのではないでしょうか.

A: まあ大丈夫ということにしようか.

O: あとは、上の輪と下の輪に面を張ればよいから、こういうことですか.



(図 7-2h)

A: できたできた.