第８章

（第８章宿題１）　球面 S^2 における対蹠点とは、平面モデル $\mathbb{S}$ においてはどのような条件を満たす２点になるかを調べよ。

A：まず，立体射影 φ は図形的な意味があるのでそのことから解説しよう．一言でいうと，北極を射影の中心とした球面から平面 $z=0$（xy 平面のことだね）への射影という性質がある．球面 S^2 を用意して，北極を N, 球面上の対蹠点 P_1, P_2 を考えよう。わかりやすいように，N, P_1, P_2 を通る平面で S^2 を切ったような図で考えるとわかりやすい。最初に，図から写像の式を計算してみよう．

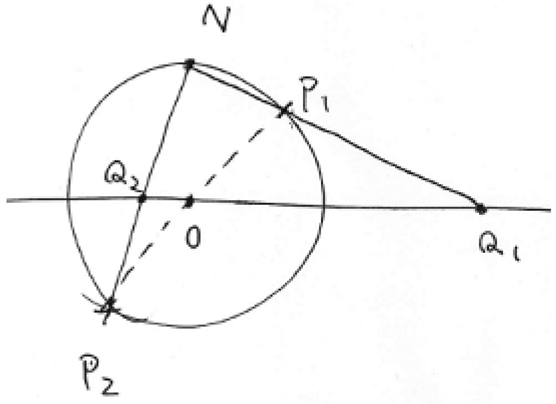


図 8-1

O：はい．立体ベクトルの問題ですから多分大丈夫だと思います．球面上の点 $P_1(x,y,z)$ に対して，図 8-1 の上の Q_1 を計算で求めてみます．直線 NP_1 の式をベクトル方程式で書くと $(0,0,1)+t(x,y,z-1)$ であることはすぐわかります．

A：$(x,y,z-1)$ はベクトル $\overrightarrow{NP_1}$ のことだね．

O：はい．この直線と水平面 $z=0$ の交点を与える t は，$1+t(z-1)=0$ より，$t=\dfrac{1}{1-z}$ となります．この時の x 座標は $xt=\dfrac{x}{1-z}$ であり，y 座標は $ty=\dfrac{y}{1-z}$ となります．したがって，$\varphi(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{1-z},\dfrac{y}{1-z}\right)$ が得られました．

A：さて，P_1, P_2 が対蹠点であるとして，$Q_1=\varphi(P_1)$ と $Q_2=\varphi(P_2)$ の座標との間にどのような関係があるかを調べよう．

O：もし $P_1(x,y,z)$ だとすると，$P_2=(-x,-y,-z)$ であることから，$Q_1=\left(\dfrac{x}{1-z},\dfrac{y}{1-z}\right)$ であり，また $Q_2=\left(\dfrac{-x}{1+z},\dfrac{-y}{1+z}\right)$ であることが計算で確かめられます．この式だけを見てもすぐに関係はわかりませんが，この後どうしますか．

A:Q_1, Q_2 から原点までの距離を求めてみるといいと思うよ．あとは線分 Q_1, Q_2 の式を求めてみると原点を通ることが確かめられるよ．

O:ではやってみます．原点までの距離をそれぞれ求めると，$OQ_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{1-z}$，$OQ_2 = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+z}$ であり，$x^2+y^2+z^2=1$ を代入して式を簡単にすると，$OQ_1 = \sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}$ と $OQ_2 = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ となります．なるほど，見るからにこれは逆数の関係にありますから，つまり $OQ_1 \cdot OQ_2 = 1$ ということになります．

A：そういうことだね．Q_1, Q_2 を通る直線はどうだろうか．

O：どうでしょうねぇ．計算をしてみますか $\cdots\cdots$（式を改めて紙に書いてみる.）$\cdots$ おや．

A：何か気づいたかな．

O：ええはい．$Q_1 = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right)$ と $Q_2 = \left(\dfrac{-x}{1+z}, \dfrac{-y}{1+z}\right)$ ということなので，この２点の，x 座標，y 座標の比が $x:y$ であることがわかります．比が同じということは，原点を始点としたベクトルが平行ということですから，Q_1, Q_2 と原点は同じ直線上にあることがわかります．もちろん計算によっても確かめられるんでしょうけれど．

A：はい，それでいいと思います．

（第８章宿題２）　球面 S^2 における大円を φ で $\mathbb{S}$ へ移すと「平面モデルの球面直線」になることを示せ。

A：球面上の円が平面上の円に移る証明から考えるといいかなと思うよ．立体射影は全単射である（S^2 の北極以外の点と，平面上の点とが完全に１対１に対応している）ので，平面上の円を立体射影（の逆写像）を使って球面上の図形へい移して，これが球面上の円であることを示せればいいと思うよ．

O：じゃあ，計算で確かめるということですね．球面上の円かどうかということですが，球面上の円ということは球面と平面との交わりという理解でいいでしょうか．

A：そうだね．

O：座標を表す文字が混乱しそうなので，球面上の点を (x,y,z) と表すことにして，平面モデルの点を (X,Y) と表すことにします．そうすると φ によって，$X = \dfrac{x}{1-z}, Y = \dfrac{y}{1-z}$ と対応がつくことが分かります．

A：$\varphi(x,y,z) = (X,Y)$ ということだね．

O：はい．平面上の円 C の方程式を $(X-a)^2+(Y-b)^2=r^2$ として，これを球面上に移した図形は $\varphi^{-1}(C)$ ということになると思います．球面上の点 (x,y,z)

が $\varphi^{-1}(C)$ 上の点であるとして，これが平面上の $(X-a)^2+(Y-b)^2=r^2$ の上の点の φ による逆像であると仮定します．そうすると，座標の式を代入することにより $\left(\dfrac{x}{1-z}-a\right)^2+\left(\dfrac{y}{1-z}-b\right)^2=r^2$ という等式が得られると思います．で，この式を整理すると

$$(x-a(1-z))^2+(y-b(1-z))^2=r^2(1-z)^2$$

展開して

$$x^2+a^2+a^2z^2-2ax-2a^2z+2axz+y^2+b^2+b^2z^2-2by-2b^2y+2byz=r^2(1\text{-}2z+z^2) \tag{1}$$

$x^2+y^2+z^2=1$ を代入すると $\cdots$ おや，思ったよりむずかしいです．これって，何かうまい計算方法があるんでしょうか？

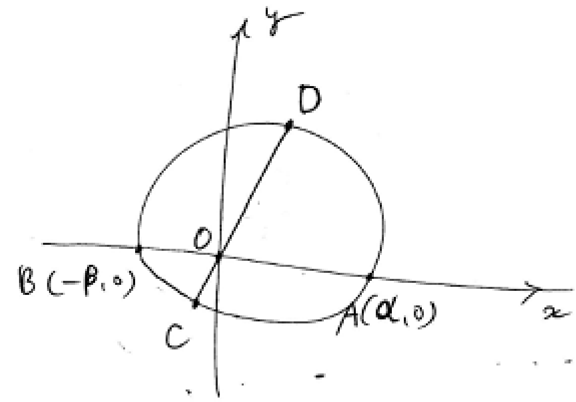
A：予定調和的に答えを考えるより，ここは少しぼんやりと問題を俯瞰してみよう．

O：球面幾何学の平面モデルにおける球面直線の条件がありましたが，あの場合に絞って考えればよいかもしれませんね．球面直線の条件式のようなものがあって，それを上の式に代入すると，パラパラパラと項が消えてくれたりして？

A：あの球面直線の条件は自分で説明していても，つくづく変な条件だと思ったよ．

O：x 軸と曲面直線の交わりを $A(\alpha,0),B(-\beta,0)$ としたときに等式 $\alpha\beta=1$ が成り立つという条件でした．この条件は宿題 1 と組み合わせて考えると，x 軸と球面直線の交わる 2 点について，φ で移す元の点たち（原像）は，球面 S^2 の対蹠点であることがわかります．このことはヒントになるでしょうか．

A：実はそうなんだ．図を改めてみてほしい．平面モデルの上の球面直線の図だけれど，この図に，原点を通る任意の直線を追加してみたものが図 8-2a だ．



(図 8-2a)

O：この図でどういうことが言えるんですか？

A：図 8-2a で追加した直線と球面直線との交点を C, D とすると，$CO \cdot DO = 1$ が成り立つんだよね．

O：そうなんですか？そのことはすぐにわかりますか？

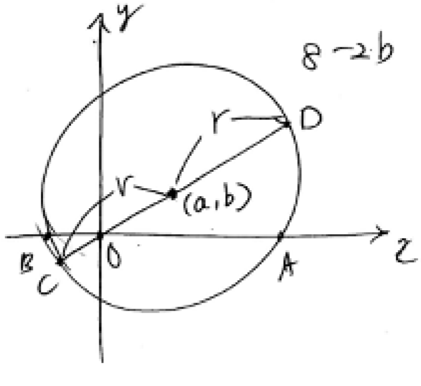
A：うん．ちょっと気が付けばわかるよ．かんがえてみるかな？

O：なにか，こういう図はみたことがあるような気がするんですが … ああ，思い出しました．方べきの定理って，こういう図ですね．

A：そのとおり．

O：球面直線と x 軸との交点を A, B としてあるので，方べきの定理により $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ が成り立ちます．ここで $AO = \alpha, BO = \beta$ ですので，$\alpha\beta = 1$ であることから $CO \cdot DO = 1$ であることが従います．これでいいでしょうか．

A：このことから，a, b, r に関する等式を導出できるかな．



(図 8-2b)

O：図 8-2b のように，原点と円の中心とを結ぶような直線を引けばいいような気がします．この直線に関しても $CO \cdot DO$ が成り立つと思いますが，CO や

DO は，a, b, c を使って表せると思います．

A：その通りだね．なかなか見通しがよいね．

O：それでいいということでしたら，座標の原点から円の中心までの距離が $\sqrt{a^2+b^2}$ ということになりますので，$OC = r - \sqrt{a^2+b^2}$ で，$OD = r + \sqrt{a^2+b^2}$ が得られます．ということは $r^2 - (a^2+b^2) = 1$ ということですね．

A：それでいいね．

O：この式 $r^2 - (a^2+b^2) = 1$ を式 1 に代入して，a^2, b^2 を消去してみたいと思います．あと，(x, y, z) は単位球面の上の点ですから $x^2+y^2+z^2 = 1$ という式を使って x^2, y^2 も消去したいと思います．

$$a^2z^2 - 2ax - 2a^2z + 2axz + b^2z^2 - 2by - 2b^2z + 2byz - z^2 = -2r^2z + r^2z^2$$

ですか?ずいぶん簡単になりました．あ！ $z^2(a^2+b^2+1-r^2)$ という塊と，$-2z(a^2+b^2-r^2)$ という塊がありますので，これを消すことができます．

$$-2ax + 2axz - 2by + 2byz - 2z + 2 = 0$$
$$2(z-1)(ax+by-z) = 0$$

おおっ！すごい！ここまできれいに変形できるとは思いませんでした．

A：この最後の式はどういう意味かな．

O:$2(z-1)(ax+by-z) = 0$ ですね．計算の最初のほうで分母である $1-z$ を払って計算していましたから，これを除外することにします．そうすると $ax+by-z = 0$ ということになります．これは原点を通る平面の方程式ですね．

A：原点を通る平面で球を切った切り口，という意味だね。つまり大円だ。できたできた．

O：（式を見直しながら）あっ

A：どうした．

O：元の式 (*) に $x^2+y^2 = 1-z^2$ を代入すると

$$1 - z^2 - 2ax(1-z) + a^2(1-z)^2 - 2by(1-z) + b^2(1-z)^2 - r^2(1-z)^2 = 0$$

なので，全体が $1-z$ でくくれることがわかります．

A：なるほど．全体は x, y, z の 2 次式だったから，$(1-z)$ でくくれると何がわかるかな．

O：$(1-z)$ でくくったとすると，細かい計算は省略しますが，くくったあとの形は x, y, z の一次式となることが分かります．つまり平面ですね．

A：ということは，球面幾何の平面モデルの上の円はどんな円でも，φ の逆写像で２次元級 S^2 へ移すと「球と平面の交わり」つまり「球面上の円」になるということがわかるね．

O：とすると，$r^2 - a^2 - b^2 = 1$ という球面直線であるための条件式は，球と平面の交わりである平面の式の定数項が消えるための必要十分条件だということですね．

A：そうだね．ここで定数項が消えるということと,「球と平面の交わりが大円になる」ということが必要十分だったということだから，話のつじつまが合うね．

O：納得しました．

（第８章宿題３）　球面 S^2 における２本の大円 C_1, C_2 を φ で $\mathbb{S}$ へ移した球面直線を D_1, D_2 とすると、「大円 C_1, C_2 のなす角」は「球面直線 D_1, D_2 のなす角と等しいことを示せ。

A：これは双曲幾何では結構有名な定理．谷口・奥村著「双曲幾何学への招待ー複素数で視る」(培風館) の＊＊＊ページ（現在調査中）に証明が出てる．

O：立体射影は双曲幾何でも重要な定理なのですね．幾何的な証明は教科書に譲るとして，僕は計算による証明をしてみたいです．

A：それなら，ベクトルでやってみますか．

O：はい．

A：まず，平面モデルのほうの適当な箇所に定点 P をとる．

O：P の座標はどうしますか？文字で書いておきますか？

A：うん．じゃ，$P(X_0, Y_0)$ とかにしておいて．

O：はい

A：点 P を始点とするような二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を考える．これも成分で考える．

O：では，$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ とします．

A：いいね．そこで，平面上に二つの道を考えよう．１つは $c_a(t) = (X_0, Y_0) + t(x_1, y_1)$ で決める．もう一つは $\vec{b}$ で決める．

O：$c_b(t) = (X_0, Y_0) + t(x_2, y_2)$ で決めていいですか．

A：いいね．どちらも，平面上では直線を表しているね．

O：はい．

A：このベクトルのなす角度を計算しておこう．

O：普通の角度の公式でいいですか？

A：いいよ.（普通でない公式，ってどんなのだろ。）

O：では

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$$

です.

A：それでいいね．では，この二つの道を φ の逆写像で球面上の道に移そう.

O：さっきのように，$X = \dfrac{x}{1-z}, Y = \dfrac{y}{1-z}$ でいいですか.

A：球面上の座標 (x, y, z) を t の式で表したいので，ここでは $x = \cdots$ の形の式を考えたいね.

O：では $X = \dfrac{x}{1-z}, Y = \dfrac{y}{1-z}$ を x, y, z について解くことにします．何となくの勘なのですが，二乗して和をとると x, y が消せそうなので筋がよさそうです．早速計算してみます.

$$X^2 + Y^2 = \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z}$$

ああ，これは z について解けますね.

$$z = \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}$$

ですか.

A：それでよさそうだ.

O：あとは $X = \dfrac{x}{1-z}$ の式から z を消去すれば x について解くことができます.

$$X = \frac{x}{1 - \dfrac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}} = \frac{X^2+Y^2+1}{2}x$$
$$x = \frac{2X}{X^2+Y^2+1}$$

ですか．それなら，たぶん計算しなくても $y = \dfrac{2Y}{X^2+Y^2+1}$ でしょう.

A：うまく解けたね．ではこの式に上の c_a を代入してみよう.

O：$X^2 + Y^2 = (X_0 + tx_1)^2 + (Y_0 + ty_1)^2$ ですから，

$$\varphi(c_a(t)) = \Bigg(\frac{2(X_0+tx_1)}{(X_0+tx_1)^2+(Y_0+ty_1)^2+1}, \frac{2(Y_0+ty_1)}{(X_0+tx_1)^2+(Y_0+ty_1)^2+1},$$
$$\frac{(X_0+tx_1)^2+(Y_0+ty_1)^2-1}{(X_0+tx_1)^2+(Y_0+ty_1)^2+1},\Bigg)$$

ですね．これを展開しますか？

A：いや，展開はちょっと待って．それよりも，これを t で微分したいんだよね．

O：いや …. それは遠慮したいんですけど … (草)

A：君以外に誰がやるの．

O：そういうことですか．分母は共通ですごい式がでてきそうですが，これも展開しないで放置していいですね．

A：いいよ．

O：

$$
\begin{aligned}
&(\varphi(c_a(t)))' \\
&= \left(\frac{2x_1\{(X_0+tx_1)^2+(Y_0+ty_1)^2+1\} - 2(X_0+tx_1)\{2x_1(X_0+tx_1)+2y_1(Y_0+ty_1)\}}{((X_0+tx_1)^2+(Y_0+ty_1)^2+1)^2}, \right. \\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

ああもう疲れました．

A：じゃあ，$t=0$ を代入した微分係数だけでもいいから求めてもらえるかな．微分の式を書きながら，$t=0$ を代入してよいことにすれば，かなり式が減るとおもうんだけど．

O：$(\varphi(c_a(t)))'(0)$ ということですね．これが何なのですか．

A：c_a が，「点 (X_0, Y_0) におけるベクトル $\vec{a}$ に沿った道」だったので，$\varphi(c_a(t))$ は「点 $\varphi(X_0, Y_0)$ におけるベクトルに沿った道」になるはずなんだよ．つまり $(\varphi(c_a(t)))'(0)$ はベクトル $\vec{a}$ を φ で移したベクトルということになる．数学ではこれを $\varphi_*\vec{a}$ と書くことになってます．

あと，$\varphi(c_a(t))$ のことを関数の合成を用いて $\varphi\circ c_a(t)$ とも書くので，$(\varphi(c_a(t)))'(0)$ ではなくて $(\varphi\circ c_a)'(0)$ と書くほうが適切だね．

O：そういうことですか．では計算をやってみます．

$$
\begin{aligned}
&(\varphi\circ c_a)'(0) \\
&= \left(\frac{2x_1\{X_0^2+Y_0^2+1\} - 2X_0(2x_1X_0+2y_1Y_0)}{(X_0^2+Y_0^2+1)^2}, \right. \\
&\quad \frac{2y_1\{X_0^2+Y_0^2+1\} - 2Y_0(2x_1X_0+2y_1Y_0)}{(X_0^2+Y_0^2+1)^2}, \\
&\quad \left. \frac{2(2x_1X_0+2y_1Y_0)}{(X_0^2+Y_0^2+1)^2} \right)
\end{aligned}
$$

おお，z 座標が思いのほか簡単になりました．

A：で，求めたいのは $(\varphi \circ c_a)'(0)$ と $(\varphi \circ c_b)'(0)$ のなす角度なんだよね．

O：そういうことでしたら，$(\varphi \circ c_b)'(0)$ はだいたい上の式と同じで x_1, y_1 を x_2, y_2 に代えたような式ですし，式の形の似ているところもあちこちにありますし，何とかなるかもしれません．

A：計算が佳境にはいると生き生きとしてくるね．

O：まかせてください．

まずノルムのほうですが，$|(\varphi^{-1} c_a)'(0)|$ が

$$|(\varphi \circ c_a)'(0)| = \frac{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{X_0^2 + Y_0^2 + 1}$$

と求まります．ひどく簡単ですね．もう一つも $|(\varphi \circ c_b)'(0)| = \dfrac{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{X_0^2 + Y_0^2 + 1}$ と思われます．あとは内積ですが，

$$(\varphi \circ c_a)'(0) \cdot (\varphi^{-1} c_b)'(0) = \frac{4(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(X_0^2 + Y_0^2 + 1)^2}$$

となります．この式も計算は複雑ですが，項の消去が豪快に発生しますので，計算してて楽しいです．

A：そうすると，$(\varphi \circ c_a)'(0)$ と $(\varphi \circ c_b)'(0)$ のなす角度はどうなるかな．

O：はい，その角を θ' とすると，

$$\cos\theta' = \frac{\dfrac{4(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(X_0^2 + Y_0^2 + 1)^2}}{\dfrac{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{X_0^2 + Y_0^2 + 1} \dfrac{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{X_0^2 + Y_0^2 + 1}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ああ，これは元のベクトルのなす角度と同じですね．これだけ大きな計算なのに，X_0, Y_0 が全部消えてしまうのは感動です！

A：まあ，図形的にも証明できているから，項が消えて当然なんですが，やっぱりこの計算は気持ちいいね．おつかれさまでした！