第９章

（第９章宿題１）　原点における縮尺を $1:(1,1,1)$ とすると、球面 **X Line** の点 $(x.y.z)$ における（x 軸方向、y 軸方向、z 軸方向の）縮尺が

$$1:\left(\frac{1}{1+x^2+y^2},\frac{1}{1+x^2+y^2},1\right)$$

であることを示せ。

O：これはどうやるのでしょうか．第８章で出てきた計算と似た式を導出せよといわれていますが．これはどうすればいいでしょうか．

A：第８章の宿題で出てきた φ という関数を使えばいいね．つまり，球面幾何学の平面モデルにおけるベクトルの長さと，球面 S^2 でのベクトルの長さを比較すればいいと思うよ．

O：ええと，球面 S^2 でのベクトルの長さが「本当の長さ」で，それが平面モデルでは何倍になっているかを調べればいいということですね．それなら８章の計算がそのまま使えると思います．

A：ではお任せしますので，自力でどうぞ．

O：あ，そういうことですか．まえの計算ではベクトル $\vec{a}$ を (x_1,y_1) とおいたとき，それを φ で移したベクトルは $(\varphi\circ c_a)'(0)$ でした．その長さの比較をすればいいということですね．実際には

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$
$$|(\varphi\circ c_a)'(0)|=\frac{2\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{X_0^2+Y_0^2+1} \tag{X}$$

ですか！この長さの比は $1:\dfrac{2}{X_0^2+Y_0^2+1}$ ですね．あれ？(X_0,Y_0) は平面モデルにおける座標ですから，これでだいたいいいようですが，係数の２だけ合っていないようです．

A：うん，計算はこれでいいね．あとは「原点における縮尺を $1:(1,1,1)$ とすると」と前提においているので，このことを加味すれば答えが出るよ．

O：あ，そういうことですか．この式 (X) だと点 $(X_0,Y_0)=(0,0)$ における縮尺が $1:2$ になってしまいます．これを $1:1$ になるように調整したとすると，(X_0,Y_0) における縮尺は $1:\dfrac{1}{X_0^2+Y_0^2+1}$ でよいように思います．

A：はい，それで正解ですね．

（第９章宿題２）　外から見て半径の長さ１を 10 メートルとすると、中にいる人にとっては約７〜８メートルであると村山さんは言っています。その正確な値を求めよ。

O：双曲幾何学のときには，縮尺を積分すれば実測距離になる，というようなことを学びました．ここでもそのことを利用するのでしょうか．

A：そうだね．そこまでわかっていればヒントはいらないと思うのでやってみて．

O：$(0,0)$ から $(1,0)$ までを真っすぐすすむことを考えて，この 2 点間の距離を積分で求めればよいでしょうか．そうすると，パラメータを t とおいて，時刻 t に $(t,0)$ という場所にいるものと仮定して，その移動距離を計算したいと思います．

A：そうそう．

O：すると，$(t,0)$ という点においては縮尺は $1:\left(\frac{1}{1+t^2}:\frac{1}{1+t^2}:1\right)$ だということになります．ここでは，x 軸方向の縮尺だけを考えればいいと思いますので，計算式は

$$10\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

を計算すればよいように思います．あ，これは arctan が出てくる積分ですね．得意な積分です．

A：たのもしいね．

O：で，

$$\begin{aligned}10\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt &= 10\left[\arctan t\right]_0^1\\ &= 10(\arctan 1-\arctan 0)\\ &= 10\cdot\frac{\pi}{4}\sim 7.854\end{aligned}$$

なるほど,「７〜８メートル」になりますね．あっていますか．

A：いいと思うよ．

（第９章宿題３）　半径１の円は１周約 30 メートルだと阿原は言っています。その正確な値を求めてください。

O：ここで言っている半径 1，というのは「外から見た長さ 1 が 10 メートル」という換算を引き続き使うという意味で考えていいでしょうか．

A：本文でそのような話をしているので，それでいっていいんじゃないかな．でも，どうやって計算するかな．

O：やはり積分だと思うのですが，曲線の長さを計算する積分公式

$$\int_a^b |f'(t)|\,dt$$

を使えばいいのではないかと思います．

A：そうだね．

O：というわけで，$f(t)=(\cos t,\sin t)$ で行きたいんですけど，いいでしょうか．

A：はい，今回は何も言うことがないね．

O：$f'(t)=(-\sin t,\cos t)$ なので，外から見たベクトルの長さは $\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=1$ なのですが，水平方向の縮尺が $1:\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ だと言っているので，点 $(\cos t,\sin t)$ での縮尺は $1:\dfrac{1}{1+\cos^2 t+\sin^2 t}=1:\dfrac{1}{2}$ です．したがって，中にいる人から見たベクトル $f'(t)$ の長さは $\frac{1}{2}$ ということになります．というわけで，

$$10\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dt=10\pi=31.4$$

くらいということだと思うんですが，間違っているでしょうか．

A：お見事です．しかも，雑誌掲載時のミスまできちんとカバーしてくれています (大笑)