まえがき

この教科書は数学を専門に勉強**しない**人のための大学の１・２年で習う線形代数の教科書です．そのため，定理や命題の証明を説明する代わりに，個々の定理を公式ととらえて，実例を見ながら，公式を使えるように練習しながら，なぜその公式が成り立つかを考えてもらう構成になっています．なお高等学校の新課程に対応するため，行列については高校でまったく習っていないことを前提に全体構成をおこなっています．

この教科書の構成は次のようになっています．最初に「予習」で，その節に必要な事項をチェックします．そして「講義」では数学の用語の定義や公式や例題が提示されます．

定義：数学特有の用語を解説します．

公式：計算を便利にこなすための式，計算がなぜ正しいかを保障するような命題を紹介します．

例題：定義や公式を適用した例を学習します．

演習：学習しながら読者に取り組んでほしい演習問題です．

問題：節のまとめとして理解を定着させるために取り組んでほしい演習問題です．

補充，参考，発展：コラム的な読み物です．

この教科書では「急いで勉強する人」「じっくり勉強する人」「進んだ内容まで勉強する人」のそれぞれに便利なように構成しています．

数学を教えるものとして，数学を急いで勉強することはお勧めしませんが，やむをえない理由により短期間で学習する必要がある人は,「定義」「公式」「基礎例題」「基礎演習」「基礎問題」「補充」だけを拾って読めば，一通り完結した内容になるように構成してあります．じっくり勉強する人は，上の内容に「標準例題」「標準演習」「標準問題」「参考」まで取り組んでください．より進んだないように興味がある人は『発展」「発展演習」「発展問題」まで学習してください．

この教科書には読者と一緒に勉強してくれる学生諸君の声がいたるところに入っ

ています．平均的な学生がみんなスラスラと理解できるわけではないと思います．彼らの声に耳を傾けながら自分の理解を確実なものにしてください．

目 次

第 1 章

行列

1.1 行列の定義

＜予習＞

- 線形代数とは**行列**と**ベクトル**に関する代数を取り扱う数学です．様々な学問の基本となる分野で，幅広い応用が知られています．まず，行列に関する基本的な事項を学習しましょう．

サク単！定義 1.1 (**行列**) 行列とは，数や式などをを縦横にならべて丸カッコ（括弧）でくくったものです．一つ一つの数を**成分**といいます．

基本例題 1.1 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ は行列の例です．

— 行列の定義ということだけど **···**
— 長方形状に数が並んでいればよい．
— 別の教科書を見たら $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ という記号を使ってたけど，同じこと？
— でしょうね．

サク単！定義 1.2 (**行と列**) 行列の横の並びを**行**といい，縦の並びを**列**といいます．行は上から第 1 行，第 2 行，$\cdots$ と呼び，列は左から第 1 列，第 2 列，$\cdots$ と呼びます．一番左上を 1 行 1 列成分，または $(1,1)$ 成分といいます．左上から数えて，上から i 行目，左から j 列目の成分のことを i 行 j 列成分，または (i,j) 成分といいます．

— **行　列**だってさ．
— ナニこれ．
— つまり行の字は横線 2 本あるから横の並び，列の字は縦線 2 本あるから縦の並び，と覚える．

— よし，覚えた．
— 例を見る限り「1 列だけ」や「1 行だけ」もいいみたいだね．(基本例題 1.1)
— 「1 行だけ」$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ というのは，座標と似てるけど．
— 数字の間にカンマがないのが違う．
— なるほど．

基本例題 1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の 1 行 2 列成分は 2 です．$(2,2)$ 成分は 4 です．

参考 1.1 行列 A の成分を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ のように書くと，「(i,j) 成分（i 行 j 列成分）が a_{ij} と表されている」ことがわかります．このことを簡単に $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)}$ と書いてよいこととします．．

— 使う文字のことだけど，i はいつでも行で j はいつでも列なのかな？
— そうでもないらしいよ．ぱらぱらとめくってみたら「(j,k) 成分」とかいう言葉もあったし．
— じゃあ $\left(a_{ji}\right)_{(i,j)}$ って書いてもいいの？
— ダメだっていうわけではないだろうけど，見にくいんじゃない？

サク単！定義 1.3 (行列の大きさ) 行列が m 個の行からなり，n 個の列からなるとき，m 行 n 列の行列，または $m \times n$ 行列といいます．

基本例題 1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ は行が 2 つ，列が 3 つありますので，2×3 行列です．

サク単！定義 1.4 (行列の和，定数倍) 行列 A, B が**同じ大きさのとき**，和 $A+B$, 差 $A-B$ が定まります．同じ位置にある成分同士を足し算，または引き算すればよいのです．
また，行列 A を定数 c 倍することもできます．A すべての成分を c 倍すればよいのです．これを cA と書きます．

基本例題 1.4 （足し算，引き算の例）

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6 & 3+7\\ 4+8 & 5+9 & 6+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8 & 10\\ 12 & 14 & 16\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}9 & 7 & 5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-5 & 7-4 & 5-3\\ 6-3 & 4-2 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

（定数倍の例）$3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 12 & 15 & 18\end{pmatrix}$

— 足し算，引き算は見たままだな．同じ場所にあるもの同士を計算すればいい．
— 行列の大きさが同じでなかったらどうするんだろう？
— 「足し算が定まらない」でいいんじゃないの？
— 足し算できないときもある，と …. メモしておこう ….

サク単！定義 1.5 (零行列) すべての成分が 0 であるような行列を零行列といいます．零行列のことを O（大文字のオー）と書きます．

基本例題 1.5 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ はいずれも零行列の例です．

補足 1.2 行列 A と同じ大きさの零行列 O を考えれば，和を計算することができますが，その結果は $A+O=O+A=A$ です．

— どうでもいいことだと思うけど，どんな行列でも 0 倍したら零行列になるよね．
— うん．ササイなことでもチェックいれていこう．

サク単！定義 1.6 (行列の積)　行列 A, B があって，A の列の数と B の行の数が一致しているとき，積 AB が定まります．たとえば，A の 1 行目と B の 1 列目に注目して，対応する成分をかけてその和をとったものを $(1,1)$ 成分とします．つまり，

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{5} & 6 \\ \boxed{7} & 8 \\ \boxed{9} & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 + 3\cdot 9 & \sim \\ \sim & \sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & \sim \\ \sim & \sim \end{pmatrix}$$

A の 1 行目と B の 2 列目に注目して，対応する成分をかけてその和をとったものを $(1,2)$ 成分とします．つまり，

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{6} \\ 7 & \boxed{8} \\ 9 & \boxed{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 + 3\cdot 10 \\ \sim & \sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 52 \\ \sim & \sim \end{pmatrix}$$

以下同様に定めていきます．

基本例題 1.6　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 52 \\ 109 & 124 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 2\times 3 + 3\times 1 \\ 3\times 5 + 4\times 3 + 5\times 1 \\ 5\times 5 + 6\times 3 + 7\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 42 \\ 62 \end{pmatrix}$$

基本演習 1.1

(1) 上の二つの例を検算してみましょう．(2) m 行 n 列の行列 A と n 行 ℓ 列の行列 B で，積 AB を作ると，何行何列の行列になりますか？

— もし行列 A の列の数と行列 B の行の数が合っていなかったら，積 AB はどうなるの？

— ····?

— 「掛け算できません」ということじゃないのかな．

— それより仕方ないよね．

— 2 つ目の $\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{14} \\ 42 \\ 62 \end{pmatrix}$ は，$1 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = 14$ という感じで計算していけばいいのかな？

— OK〜

— 「積が何行何列になるか？」だって．どうする？

— 例で調べればいいんじゃない？ 1 つ目の例だと 2 行 3 列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ と 3 行 2 列 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ の積をつくると 2 行 2 列 $\begin{pmatrix} 46 & 52 \\ 109 & 124 \end{pmatrix}$ になった.

— 2 つ目だと 3 行 3 列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ と 3 行 1 列 $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，3 行 1 列 $\begin{pmatrix} 14 \\ 42 \\ 62 \end{pmatrix}$ だな.

— は，は，は！m 行 n 列の行列 A と n 行 ℓ 列の行列 B の積 AB は，m 行 ℓ 列でいいんじゃない？

基礎問題 1.1　行列の和，積を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解答:　(1) $\begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 5-3 & 2-4 \\ -1-(-2) & 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) \\ (-2) \cdot 2 + (-4) \cdot 5 & (-2) \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -10 \\ -24 & 14 \end{pmatrix}$

(4) $5(-1) + 2 \cdot 2 + (-1)(-1) = 0$　$\boxed{|_{\forall}|}$

— 定義をよく読んで計算すれば大丈夫だね．最初のは，ベクトルの足し算ぽいな．同じと思ってもよさそうなのかな？

— 結果的にベクトルの和と同じことになりそうだね．

— (4) はこれどういうこと？

— 横長の行列と縦長の行列の積だけど，なんだか内積みたいな感じだなあと思ったよ．

— 1 行 3 列の行列と 3 行 1 列の行列の積だから，1 行 1 列だよね．$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ と書いたほうがよくないかな … 先生に聞いてみよう．

（後日）

— 聞いてきた．1 行 1 列の行列は普通の数と同じようにみなして，カッコをつけてもつけなくてもいいんだって．

— カッコをつけなくてよいと（笑）

標準問題 1.2　A の n 個の積 $AA\cdots A$ を A^n と書いて行列 A のべきという．次の行列のべきがどうなるかを予想して，数学的帰納法で証明せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

解答:　(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$，(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

以下，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を繰り返す．

— $n = 2, 3, 4$ くらいで試してみれば，答えの予想はつきそうだな．証明（数学的帰納法）は宿題？

— そうみたいだな．

— $\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を計算で確かめればいいのかな？

— 数学的帰納法，ってそういうことなの？ああ，これは $n = k$ で正しいとしたとき，$n = k+1$ ではどうかという計算のことだね．$n = 1$ のときはどうのこうの，というのも必要だよね．

— あ，もちろん必要だね．

— 心配なので，ちゃんとした解答もほしいぞ．

— (3) のは，3 回かけると元に戻る，というところがなんだかおもしろい．方程式 $x^3 = 1$ の解のような感じだけれど，整数の行列なので，無理数が出てくるわけではない．こういう $A^4 = A$ となる行列はたくさんあるのかなぁ？

— 先生に聞いてみよう．

（先生に質問に行きました.）

— 答えは「たくさんある」なんだって．来週かその次の練習問題で解くかも … だって．

標準問題 1.3 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$ とする．3つの積 ABC を次の2通りの方法で計算せよ．

(1) まず AB を計算してその後に C をかける．すなわち $(AB)C$ を求める．

(2) まず BC を計算してその後に A をかける．すなわち $A(BC)$ を求める．

解答:

$$(1)\ AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot6&1\cdot5+2\cdot7\\3\cdot4+4\cdot6&3\cdot5+4\cdot7\\5\cdot4+6\cdot6&5\cdot5+6\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&19\\36&43\\56&67\end{pmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}16&19\\36&43\\56&67\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\cdot8+19\cdot9\\36\cdot8+43\cdot9\\56\cdot8+67\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}299\\675\\1051\end{pmatrix}$$

$$(2)\ BC=\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot8+5\cdot9\\6\cdot8+7\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}77\\111\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}77\\111\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot77+2\cdot111\\3\cdot77+4\cdot111\\5\cdot77+6\cdot111\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}299\\675\\1051\end{pmatrix}$$

— 大変すぎる ….

— でも答えは同じになった …

— これが数学のフォースによるものなのか …

— んなものありませんて．299 だけでも追跡しておきましょうかね．

— 追跡？

— (1) では $299=16\cdot8+19\cdot9=(1\cdot4+2\cdot6)\cdot8+(1\cdot5+2\cdot7)\cdot9$

(2) では $299=1\cdot77+2\cdot111=1\cdot(4\cdot8+5\cdot9)+2\cdot(6\cdot8+7\cdot9)$

結局 2 世代さかのぼれば同じ式というわけですか．

— われら，フォースとともにあれ ….

1.2　転置行列・対称行列

＜予習＞

- 行列 A の成分を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ のように書くと，「(i, j) 成分（i 行 j 列成分）が a_{ij} と表されている」ことがわかります．このことを簡単に $\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)}$ と書いてよいこととします．

— 行列の定義は ……

— 数がタテヨコに並んでいるもの！

— カッコで囲むことも大切.

— 横並びが行，縦並びが列と．a_{ij} つまり i 行 j 列成分ていうのは上から i 番目，左から j 番目と言うことだった …… よね.

— で，それを $\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)}$ と書いてもよいということだね.

サク単！公式 1.1 (行列の演算)　以下の計算においては，行列 A, B, C はそれぞれ計算ができるような行・列の数を持っているものとします.

(1) $A + B = B + A$　(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A(B + C) = AB + AC$　(4) $(A + B)C = AC + BC$

(5) $(AB)C = A(BC)$　(6)AB と BA とは一般に一致しない.

(7) $A \neq O, B \neq O$ でも $AB = O$ になることがある.

基本例題 1.7

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3+5 \\ 2+4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+7 \\ 6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (5+7) + 2 \cdot (6+8) \\ 3 \cdot (5+7) + 4 \cdot (6+8) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot6\\3\cdot5+4\cdot6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\cdot7+2\cdot8\\3\cdot7+4\cdot8\end{pmatrix}$$

(4) $\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5&2+6\\3+7&4+8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(1+5)\cdot9+(2+6)\cdot10\\(3+7)\cdot9+(4+8)\cdot10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot9+2\cdot10\\3\cdot9+4\cdot10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\cdot9+6\cdot10\\7\cdot9+8\cdot10\end{pmatrix}$$

(5) の計算例は標準問題 1.3 を参照してください．

(6) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7&1\cdot6+2\cdot8\\3\cdot5+4\cdot7&3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3&5\cdot2+6\cdot4\\7\cdot1+8\cdot3&7\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}$$

(7) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

標準演習 1.2　公式 (1)〜(5) が成り立つ理由を考えてみましょう．上の例の (6)(7) を検算してみましょう．

— (1) なんかなんだか当たり前のような交換法則？とか … (2) みたいのをなんというだっけ？
— 交換法則は (1)，(2)(5) は結合法則，(3)(4) は分配法則だね．
— 何でも知ってるんだ ….
— 中学校でならったと思うけど．で，例題の計算で証明がわかるのかな …
— ねぇこれどうして，最後まで計算していないんだろう．とくに (3) とか (4) とか．
— 計算してしまわないほうが，2 つの式が同じ値になることがよくわかる，という先生の配慮だと思うよ．$1\cdot(5+7)$ と $1\cdot5+1\cdot7$ とか．
— ああ，そういうことか，なるほど，同じ値になることがわかるような気がするよ．はいはい．で (5) は？
— (5) は難しい．数学のフォースがなければ解けない ….
— またフォースですか（笑）299 の生い立ち（標準問題 1.3) だけはたどってみたけどね．たぶんこれみたいな感じ？一般論でやれといわれても難しいかな．

— (6) はどういう教訓なわけ？
— 行列の積は交換できないと．
— 気難しいな．で，(7) は？
— 零行列 O でないもの同士をかけても O になることがあるらしい．
— そういうのを**零因子**っていうって先生が口ずさんでた．
— よく聞いてるなぁ．

サク単！定義 1.7 (転置行列) 行列の行と列の役割を交換した行列のことを**転置行列**といいます．記号では A の転置行列を ${}^tA$ と書きます．

基本例題 1.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ とすると，転置行列は ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

m 行 n 列の行列 A の転置行列は n 行 m 列です．

参考 1.3 行列 A が $A = \Big(a_{ij}\Big)_{(i,j)}$ と表されるとしましょう．このとき，転置行列の (i,j) 成分は a_{ji} になります．たとえば，転置行列 ${}^tA$ の $(1,2)$ 成分は a_{21}（行列 A の $(2,1)$ 成分）になります．

サク単！公式 1.2 (転置行列の基本公式) (1) ${}^t({}^tA) = A$
(2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
(3) ${}^t(cA) = c\,{}^tA$
(4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

基本例題 1.9 (1) ${}^t\left({}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(2) ${}^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

$$ {}^t\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}+{}^t\begin{pmatrix}5&6\\7&8\\9&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&7&9\\6&8&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10&14\\8&12&16\end{pmatrix} $$

(3) $$ {}^t\left(3\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\right)={}^t\begin{pmatrix}3&6\\9&12\\15&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&15\\6&12&18\end{pmatrix} $$

$$ 3\cdot{}^t\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&15\\6&12&18\end{pmatrix} $$

(4) $$ {}^t\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\\9&10\end{pmatrix}\right)={}^t\begin{pmatrix}46&52\\109&124\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46&109\\52&124\end{pmatrix} $$

$$ {}^t\begin{pmatrix}5&6\\7&8\\9&10\end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&9\\6&8&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46&109\\52&124\end{pmatrix} $$

標準演習 1.3　これらの公式が成り立つ理由を考えてみましょう．

— さて，転置行列を勉強しました！

— 教員の口調が感染ってない？行と列の役割を交換するということだね．

— いっぱい公式があるなぁ．公式の成り立つ理由を考えようといわれてるけど．

— (1) は「行と列を交換して，その後にもう一度交換するから元に戻る」なんていう理由でいいのかなぁ．

— それはわかりやすいと思う．数学としてどうかはともかく（笑）

— (2)(3) は例題を見たら，ああそういうことかぁみたいな感じで，公式はいつでも成り立つような気がする．足してから行・列を交換するか，行・列を交換してから足すか，みたいな話だよね．定数倍もそう．

— うんうん．その調子で公式 (4) もよろしく（笑）

— よろしく言われたわりに (4) はわからない …??

— (脇から）なになに？公式 (4) わかったの？

— い〜や，誰もまだわかってない．

— よくみると，たとえば例のほうの (4) の $(2,1)$ 成分の 52 という数字だけど，計

算では両方とも $1\times 6+2\times 8+3\times 10$ という計算からでてる．
— でてる．
— だから，入り組んでいるように見えるけれど，実はいつでも同じ計算になってもいいような気はする．
— 結果がそうなってほしいという意味ではいいような気がするけれど，本当？
— あ，もしかしてわかったかも．
— おう．すごい．
— 52 は $\begin{pmatrix} 46 & 109 \\ 52 & 124 \end{pmatrix}$ では 2 行 1 列の成分でしょう?だから 1 つ前の式 ${}^t\begin{pmatrix} 46 & 52 \\ 109 & 124 \end{pmatrix}$ では 1 行 2 列のところにいるわけだ．
— うん．
— だから，A の 1 行目と B の 2 列目から計算される数なわけよ．
— それが $1\times 6+2\times 8+3\times 10$ だな．
— ${}^tB\,{}^tA$ のほうでは，結果の 2 行 1 列ということは，${}^tB$ の 2 行目と ${}^tA$ の 1 列目から計算されなければいけない．
— ふんふん．で？
— 「${}^tB$ の 2 行目」はすなわち「B の 2 列目」だし ⋯⋯
— 「${}^tA$ の 1 列目」は「A の 1 行目」ってことか．つまり A の 1 行目と B の 2 列目から計算される数だ！
— おうよ．2 行 1 列を i 行 j 列に言いかえれば，いつでもいけるンじゃないかと思うよ．
— すげ〜〜．経験値あがった気がする．

サク単！定義 1.8 (対称行列) (1) 正方行列 A が $A={}^tA$ を満たすとき，A を**対称行列**といいます．
(2) 正方行列 A が $A=-{}^tA$ を満たすとき，A を**交代行列**といいます．

基本例題 1.10 (1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とすると，${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ なので A は対称行列です．

(2) $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，${}^tB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-B$ なので B は交代行列

です．

— どういうこと？これ？
— 察するに …. よくわからん．
— $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分が同じ，$(1,3)$ 成分と $(3,1)$ 成分が同じ，そういう意味だろう？
— それが「対称」の意味か．交代のほうはどなの？
— $(1,2)$ 成分のマイナスが $(2,1)$ 成分で，$(1,3)$ 成分のマイナスが $(3,1)$ 成分だということだな．
— それならわかる．

基礎問題 1.4　次の計算をせよ．

(1) ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) ${}^t\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

解答:　(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\boxed{|\forall|}$

— 楽勝でしょう．
— 行と列を入れ替えるだけだもんね．
— ページがあまったから何か言って．
— ナニ言ってるか分からない．
— そういえばさ，いつだったか $\left(a_{ji}\right)_{(i,j)}$ って書いていいのかなぁなんて言ってたでしょう？
— うん．
— あれ，先生に聞いたら「転置行列ですね」って言われた．
— どういうこと？
— $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)}$ とすると，A の (i,j) 成分が a_{ij} ということ．
— うん．
— とすると，${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji} になる．
— うん．そんなことどこかで書いてあった．
— つまり ${}^tA = \left(a_{ji}\right)_{(i,j)}$ なんだって．

— へぇ.

基礎問題 1.5 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 5\\ -2 & 1 & b\\ c & 3 & 4\end{pmatrix}$ が対称行列になるように a,b,c を決めよ.
$B=\begin{pmatrix}d & 3 & e\\ f & 0 & 2\\ 5 & g & h\end{pmatrix}$ が交代行列にになるように d,e,f,g,h を決めよ.

解答: $a=-2, b=3, c=5, d=0, e=-5, f=-3, g=-2, h=0$

|∀|

— え〜，なんで答えだけなの，これ.
— 対称，って対角線について対称ってことでしょう？
— 謎だ ⋯⋯ どうやるの？
— えー簡単だと思うけど．見た感じでわからない？(別の人をつかまえて）ねぇ，これすぐわかるよねぇ？
— ああ，これね，$A=\begin{pmatrix}1 & a & 5\\ -2 & 1 & b\\ c & 3 & 4\end{pmatrix}$ だから ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & -2 & c\\ a & 1 & 3\\ 5 & b & 4\end{pmatrix}$ で $A={}^tA$ でしょう？成分比較して答えをだすんだよ.
— （一同）⋯⋯⋯⋯
— $B=\begin{pmatrix}d & 3 & e\\ f & 0 & 2\\ 5 & g & h\end{pmatrix}$ から ${}^tB=\begin{pmatrix}d & f & 5\\ 3 & 0 & g\\ e & 2 & h\end{pmatrix}$ でしょう．$B=-{}^tB$ だから，成分比較して，$d=-d, e=-5, 3=-f, 2=-g, h=-h$．$e,f,g$ はこのまますぐにわかって，d,f は移項して 0 だってわかるね.
— そうやってやるんだ〜
— へ？だって解けてたんでしょう？
— もっと「なんとなく」わかってたみたい ⋯ (恥)

1.3 正方行列，逆行列

＜予習＞

- 行列の定義を思い出しておきましょう．
- 行列の掛け算の定義を思い出しておきましょう．特に，行列の掛け算が計算できる条件は何だったでしょうか．

— 行列の定義は前の時間にやったから ⋯

— 数がたてよこに並んでる．

— 行列の掛け算が計算できる条件てなんだっけ ⋯

— A と B の行と列が同じならいいのかな？

— それはたぶん「足し算」だとおもう．

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ とかだったね．

— 掛け算はこういうのだった．$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$

— だから，A の列の数と B の行の数が同じだったら ⋯

— 掛け算できる．

— そういうこと．

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 33 \end{pmatrix}$ は OK?

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の列の数は 2，$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ の行の数は 2．だから掛け算は作れる．でも，計算違ってない？

— $\begin{pmatrix} 19 \\ 43 \end{pmatrix}$ だね．

サク単！定義 1.9 (正方行列) 行の数と列の数が等しい行列を**正方行列**といいます。n 行 n 列行列というかわりに n **次正方行列**といいます。

基本例題 1.11 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は 2 行 2 列なので 2 次正方行列です.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ は 3 行 3 列なので 3 次正方行列です.

サク単！定義 1.10 (単位行列) (1) 左上から右下ににかけての対角線上にある成分を**対角成分**といいます.
(2) 対角成分が 1 でそのほかが 0 であるような行列を単位行列といって，I の記号で書くことにします．n 次正方行列であることを特に強調したいときには I_n と書きます.

基本例題 1.12 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

基本演習 1.4 I_4 を具体的に書いてみてください.

— 正方形だから‥
— 正方行列！
— わかりやすいな.
— 単位行列は I なの？I_2 とか I_n というのは何だろう？
— 定義には「n 次正方行列であることを特に強調したいときは I_n」だって．ふつうは I でいいってことかな.
— うん．演習 1.4 は $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ でいいんだよね.

— いいと思うよ．0 を書くのが大変だな．

サク単！公式 1.3 (**単位行列の公式**)　A を m 行 n 列の行列とするとき、$AI_n = I_mA = A$ です。

基本例題 1.13　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

標準演習 1.5　上の例を検算してください．また，なぜ公式が成り立つかを考えてみてください．

— $IA = A$ や $AI = A$ はいつでも使っていいってことだね．I は数字の 1 みたいな感じの行列だね．
— うん．演習 1.5 でどうしてそうなるかを聞かれてるけど ⋯⋯
— ん～？実例で考えるといつでもそうなっているから？
— ひとつひとつの成分を考えてみればそうなってるかな．

サク単！定義 1.11 (**逆行列，正則行列**)　(1) n 次正方行列 A に対して $AB = BA = I$ となる行列 B が存在するとき，これを A の**逆行列**といって，A^{-1} で書き表わします．つまり，逆行列が存在すれば $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ です．
(2) 正方行列 A が逆行列をもつとき，A は**正則行列**であるといいます．

— 定義 1.11 の $AB = BA = I$ ならば逆行列ってどれが逆行列なの？
— B のことだと思う．
— $B = A^{-1}$ ということかな．
— そうそう．
— $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ で覚えればいいよね．

サク単！公式 1.4 (2 **次行列の逆行列**) A が 2 次正方行列ならば $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ です.
逆行列が存在するための必要十分条件は $ad-bc \neq 0$ です.

基本演習 1.6 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めてください．そして，$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = I$ と $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = I$ を検算してください.

標準例題 1.14 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ は逆行列を持ちません．実際に，$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, b, c, d について解いてみると，解がないことがわかります．このことを検算してみましょう.

— 公式 1.4 ではさ，2 次正方行列のときには逆行列の公式があるんだね．3 次や 4 次でもあるのかな

— さあ〜？あとで先生に聞こう.

— その次の例 1.14 で $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ は逆行列を持たない，ってどういうこと？a, b, c, d について解いてみるとか言ってるけど.

— あ，だからつまり，$a+3c=1, b+3d=0, 2a+6c=0, 2b+6d=1$ を連立方程式だと思って解きなさい，ということでしょう？

— $a+3c=1$ なら $2a+6b=0$ ということはありえないから答えがないよ，これ．変じゃない？

— だから「解がないから逆行列もない」ってことでしょう.

— そういうことですか.

サク単！公式 1.5 (正則行列の性質) (1) A が正則だとすると，A^{-1} も正則であって，$(A^{-1})^{-1} = A$ です．
(2) A, B が正則だとすると，AB も正則であって，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ です．

標準演習 1.7 この公式がなりたつ理由を考えてみてください．

— 定義 1.11 で A^{-1}って数なら $\frac{1}{a}$ みたいなものかな？$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ でしょう？
— なるほど．そういうことか．
— それだったら，公式 1.5 の $(A^{-1})^{-1}$って，$1/(\frac{1}{a}) = a$ってことだよね．
— それならわかる．あ〜だから，えーと，$A^{-1}B = BA^{-1} = I$ を満たすような B が $(A^{-1})^{-1}$ の定義だけど，$B = A$ はこの式を満たしてるんだよ．
— 頭いいな．おまえ．
— 公式 1.5(2) の $(AB)^{-1}$ はだいたい $\frac{1}{ab}$ だから $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ か．
— なんで右辺の順番が逆なんだ？
— さあ？
— $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = I$ってことか
— $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = I$ もだな．うまく消えるためにはこの順番なんだな．
— 覚えておこう ····．

サク単！定義 1.12 (対角行列) (1) 対角成分以外はすべて 0 であるような行列を**対角行列**といいます．
(2) 対角成分以外はすべて 0 であって，対角行列が等しいような行列を**スカラー行列**といいます．

基本例題 1.15 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ は対角行列です．$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ はスカラー行列です．

基礎問題 1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めてみよ．それが逆行列であることを検算してみよ．

解答: 公式 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ に代入して，

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\cdot 2 - 4\cdot 1}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

検算して

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 4\cdot\frac{1}{2} & 3\cdot(-2) + 4\cdot\frac{3}{2} \\ 1\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot(-2) + 2\cdot\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 - 2\cdot 1 & 1\cdot 4 - 2\cdot 2 \\ -\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{3}{2}\cdot 1 & -\frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{3}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

|∀|

— 先生に聞いてきた．3 次でも 4 次でも逆行列の公式はあるって．
— で，どういうの？
— 「余因子」っていうところで出てくるって．でも，どうせ覚えられないから覚えないほうがいいって言われた (涙)
— じゃぁ，どうやって求めるの？
— それはそれで掃き出し法のところで習うってさ．

基礎問題 1.7 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ を計算してその意味を考えよ．

解答:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{11} & 3a_{11} \\ 4a_{22} & 5a_{22} & 6a_{22} \\ 7a_{33} & 8a_{33} & 9a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{22} & 3a_{33} \\ 4a_{11} & 5a_{22} & 6a_{33} \\ 7a_{11} & 8a_{22} & 9a_{33} \end{pmatrix}$$

（計算の意味）左からかけると行ごとに定数倍が行われ，右から書けると列ごとに定数倍される． |∀|

— これは，ただ行列の積を求めればいいのかな．
— そうみたいだね．
— 左からかけるときと，右からかけるときでは結果が違う．
— 行列はかける順序を変えられない，って先生も言っていた．
— まさにこれだな．
— 「左からかけると行ごと」ってどういうこと？
— a_{11} $2a_{11}$ $3a_{11}$ とか，同じ行には同じ数がかかるってことだと思う．
— で，右からかけると，それが列になるんだね．
— 右からかけると同じ列には同じ数がかかる．
— スカラー行列だと，結局定数倍と同じことじゃないか？
— あーそうだね．$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a$ の場合だからね．

標準問題 1.8 行列 A ある行のすべての成分が 0 であるならば，A は正則行列ではない．

解答: 背理法を用いる．行列 A のある行がすべて 0 だとしよう．ここでは $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ で計算してみるが，ほかの場合もまったく同様に考えることができる．もし A に逆行列 $B=A^{-1}$ が存在するならば，$AB=I$ が成り立つ．AB の $(2,2)$ 成分を考えてみると，

$AB=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ という計算により，AB の $(2,2)$ 成分は 0 である．従って $AB=I$ ということはありえない．これは矛盾であり，A に逆行列が存在しないことが示された． |∀|

— 「$(2,2)$ 成分は 0 である．従って $AB=I$ ということはありえない」の理由がわからないよ．

— I は単位行列だから，$(2,2)$ 成分は？

— 1 だね．あ，そういうこと …… え〜〜〜〜っ．そういう結論でだめなわけ？

— そうみたいだね．A の i 行目が全部 0 だったら，結局 AB の (i,i) 成分を見てみれば，これがいつでも 0 になっている … という筋でしとめるみたいだな．

— 「しとめる」って将棋じゃないんだから．

— そうすると,「ある列のすべての成分が 0 だったら」というのもいえそうだね．今度は $BA=I$ を計算すればよいのかな．

— $BA=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$ でやっぱり $(2,2)$ 成分が 0 になるわけだ．

— なるほど．

1.4　トレース・べき

＜予習＞

- 総和をとる記号は $\sum$ です.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と書きます.

サク単！定義 1.13 (トレース)　n 次正方行列 A が $A = (a_{ij})_{(i,j)}$ と与えられているとします．このとき，A の**トレース**を

$$\mathrm{Tr}A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

により定義します．$\mathrm{tr}A$ と書かれることもあります.

基本例題 1.16　2×2 行列であれば，$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ です.

— 定義 1.13 のトレースは斜めに足すことだね.

— 左上から右下だな.

— $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$ でいいの？

— いいと思う.

— $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ はどういう意味？

— 左上の成分が a_{11} で，その右下の成分が a_{22} で，テンテンテンっと続けていって一番右下の成分までを足しましょう.

— そういうことか.

サク単！公式 1.6 (トレースの公式)　(1) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$

(2) $\mathrm{Tr}(cA) = c\mathrm{Tr}A$

(3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

基本例題 1.17 (1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ とすると,

$A+B=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}$ です.

$$\mathrm{Tr}A=1+4=5$$

$$\mathrm{Tr}B=5+8=13$$

$$\mathrm{Tr}(A+B)=(1+5)+(4+8)=18$$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ とすると $3A=\begin{pmatrix}3\times 1 & 3\times 2\\ 3\times 3 & 3\times 4\end{pmatrix}$ だから,

$$\mathrm{Tr}A=1+4=5$$

$$3\mathrm{Tr}A=3(1+4)=15$$

$$\mathrm{Tr}(3A)=3\times 1+2\times 4=15$$

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB)&=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{pmatrix}\\ &=5+14+18+32=69\\ \mathrm{Tr}(BA)&=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4\\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4\end{pmatrix}\\ &=5+18+14+32=69\end{aligned}$$

標準演習 1.8 上の公式がなりたつ理由を考えてください.

参考 1.4 正則行列（逆行列が存在する行列）P に対して, $P^{-1}A$ と A について上の公式 (3) を適応してみると,

$$\mathrm{Tr}((P^{-1}A)P)=\mathrm{Tr}(P(P^{-1}A))=\mathrm{Tr}(IA)=\mathrm{Tr}(A)$$

が成り立ちます. $P^{-1}AP$ を A と**共役な行列である**または**相似な行列である**とい

いますが，トレースの値は変わらないということがわかりました．

— 公式 1.6 の成り立つ理由って，何を言えばいいの？
— 証明しろっていわれてるわけじゃないからなぁ．
— 例 1.17 なんかだと (1) で，$\mathrm{Tr}(A+B)=(1+5)+(4+8)$ だけど，この 1 とか 5 とか 4 とか 8 とかって，結局 $\mathrm{Tr}A$ とか $\mathrm{Tr}B$ とかに出てくる数だっていうことじゃないの？
— $\mathrm{Tr}A=1+4$ だし $\cdots$
— $\mathrm{Tr}B=5+8$ だから全部たして 18 ということか．
— それだったら $3\mathrm{Tr}A$ のほうも結局そういうことだね．$3\mathrm{Tr}A$ だと対角線上の数を足してから 3 倍するってことだけど，$\mathrm{Tr}(3A)$ だと成分を全部 3 倍してから対角線上の成分を足すってことでしょ．
— 「対角成分」っていうらしいよ（笑）
— あの〜ちょっとききにくいんだけど，どうして，$\mathrm{Tr}A$ とか $\mathrm{Tr}(3A)$ とか，Tr の後にカッコをつけたりつけなかったりするの？
— そう言われてみれば $\cdots$?
— １文字のときはカッコなし，2 文字以上のときはカッコあり，だと思ってた．
— おお．納得．
— 公式 1.6(3) で，$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ の成り立つ理由は？
— 分からなくても多分単位はとれる（笑）
— むつかしいよ．
— でも一応，考えろって言われてる．
— （あきらめて）問題いこうぜ．
— 上の例だと，$5+14+18+32$ と $5+18+14+32$ なんだよな．
— 結局足す順序が変わっただけ，ということか．
— $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とかおいて，同じ計算をしてみればできそうな気がする．
— おお．なるほど．やってみるか $\cdots$
— $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ だから $\mathrm{Tr}(AB)=ae+bg+cf+dh$
— $\cdots$ なった？

— まだ半分しか計算してない．$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$

だから $\mathrm{Tr}(BA) = ea + fc + gb + hd$

— ⋯ なった？

— $ea = ae$ とかしていいんだよね ⋯ じゃぁなった．

— この公式って，3 次でも 4 次でもいけてるの？

— 先生はそう言ってた．

— $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ を成分の計算で示すのはしたくないな．

— それで単位もらえるならやってもいい（笑）

— くれないって．

サク単！定義 1.14 (行列のべき)　正方行列 A と正の整数 n に対して

$$A^n = AA \dots A(n \text{ 個の積})$$

A^{-1} が存在するとき (A が正則のとき)

$$A^{-n} := (A^{-1})^n$$

とします．また，定義として，$A^0 = I$ と定めます．

サク単！公式 1.7 (べきの公式)　(1) $A^n A^m = A^{n+m}$
(2) $(A^n)^m = A^{nm}$

標準演習 1.9　この公式が成り立つ理由を考えてください．

発展 1.5　一般には，$(AB)^k \neq A^k B^k$ です.（もちろん，たまたま一致するということはありえますが.）というのは，$(AB)^k = ABAB \cdots AB$ であって，A と B とが交換可能とは限らないからです．もし $AB = BA$ であるならば $(AB)^k = A^k B^k$ が成り立ちます．

— 定義 1.14 のべきだけど，これは数のべきと同じと考えていいの？

— よさそうな感じだな．マイナスのべきも数のときと同じ．$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ってことでしょう．

— それならわかる．そのあとの $(AB)^n$ がどうのこうの，っていうのはどういうことなの？

— $(AB)^n = ABAB\cdots AB$ で，A^nB^n は $AA\cdots ABB\cdots B$ってことでしょう．

— そしたらイコールじゃないの？

— かける順番を変えたら行列は変わっちゃうからダメ．

— そっか．$AB = BA$ なら OKっていうのはそういう意味なんだね．

基礎問題 1.9 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$$

を示せ. これをケーリー・ハミルトンの公式という.

解答:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$-(a+d)A = -(a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 - ad & -ab - bd \\ -ac - cd & -ad - d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad-bc)I = (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

この 3 式を加えて成分計算をすれば $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$ を得る.

$\boxed{|_\forall|}$

— ハーリーケミルトン …

— 人名間違えてるとおもうよ.

— これは何がエライの？

— 2 次正方行列で A^3 とか A^4 とか計算するときに使える …. と先生は言っていた.

— $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$ を A^2A や A^2A^2 に代入するっていうことだね.

— そうそう.

— 3 次や 4 次正方行列でもケーリー・ハミルトンってあるのかなぁ

— 先生はあると言ってた. やっぱりトレースとか出てくるらしいよ.

— どんな式なのかな ….

— きっと覚えきれないですよ …. って言われた（涙）

— A^n の計算の公式ってあるのかな … $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{100}$ とか（笑）

— 今度先生に聞きに行こう.

標準問題 1.10　(1) 2 次正方行列 A が $A \neq kI$（k は実数定数）かつ $A^2 = I$ をみたすという．$p = a + d, q = ad - bc$ とするとき，p, q を求めよ．
(2) 2 次正方行列 A が $A \neq kI$（k は実数定数）かつ $A^3 = I$ をみたすという．$p = a + d, q = ad - bc$ とするとき，p, q を求めよ．

解答:　(1) ケーリー・ハミルトンの公式により $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I = pA - qI$ である．$A^2 = I$ より $pA = (1+q)I$ であるが，$A \neq kI$（k は実数定数）であるから，$p = 0$ でなければならず，したがって $q + 1 = 0$ である．
（答え）$p = 0, q = -1$

(2) ケーリー・ハミルトンの公式により，$A^2 = pA - qI$ である．したがって $A^3 = A(pA - qI) = pA^2 - qA = p(pA - qI) - qA = (p^2 - q)A - qI$ である．$A^3 = I$ より $(p^2 - q)A = (pq + 1)I$ であるが，$A \neq kI$（k は実数定数）であるから，$p^2 - q = 0$ でなければならず，したがって $pq + 1 = 0$ である．$q = p^2$ より $p^3 + 1 = 0$ であって $p = -1$．したがって，$q = 1$
（答え）$p = -1, q = -1$

— 自力でこれを解くのはむつかしいな．「$A \neq kI$（k は実数定数）であるから，$p = 0$」ってどうして？
— もし $p \neq 0$ だとすると $\cdots$
— $pA = (1+q)I$ から $A = \frac{1+q}{p}I$ ってことですか．
— はぁ．先生はケーリー・ハミルトンの公式を覚えていれば十分だ，と言っていたよ．
— ねぇどうして「$q = p^2$ より $p^3 + 1 = 0$」なの？
— どこどこ？だって $pq + 1 = 0$ に代入したんでしょ．
— そっか．
— $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ は $a + d = -1, ad - bc = -1$ だから，$A^3 = I$ なんだね．問題 1.2(3) にあったでしょう．
— ホントだホントだ．

標準問題 1.11 正方行列 A が $A^r = O$（r は正の整数）をみたすとき，**べき零**であるという．
(1) O 以外のべき零な行列の例を見つけよ．
(2) A がべき零ならば $I - A$ は正則であることを示せ．（ヒント：$I - A^r$ を因数分解してみよう．）

解答: (1) たとえば $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば，$A \neq O$ であって $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ である．
(2) $I - A^r$ を因数分解すると，

$$\begin{aligned} I - A^r &= (I - A)(I + A + \cdots + A^{r-2} + A^{r-1}) \\ &= (I + A + \cdots + A^{r-2} + A^{r-1})(I - A) \end{aligned}$$

となっている．問題の仮定より $I - A^r = I$ であるので，$B = I + A + \cdots + A^{r-2} + A^{r-1}$ とおけば，B が $I - A$ の逆行列であることが分かり，$I - A$ は正則である． |∀|

— (1) は気づくかどうか？ということ？
— そうらしいよ．
— じゃぁ答えを覚えておこう．$A^2 = O$ で $A \neq O$ってちょっとおもしろいよね．
— あと，因数分解って文字式と同じにやっていいの？
— 行列の文字が 1 つだったらいい，って先生に言われた．
— 交換できるのできないの，というわずらわしさがなくなるからね．
— ヒント貰えば，なんとなくわかるんだけどな．こういうのって，自力で証明書けないといけないのかな．
— 先生に聞きにいったら「$I + A$ も正則になるから調べてごらん」と言われた．
— う〜〜後で考えてみる．

1.5 行列式

＜予習＞

- $1, 2$ を並べる方法は $(1,2), (2,1)$ の 2 通り，$1, 2, 3$ を並べる方法は $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$ の6通りあります．このような，$1, 2, \cdots, n$ の並べかえのことを**置換**といいます．

S— はて …… この予習の意味は？

サク単！定義 1.15 (行列式) (1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式**を $|A| = ad - bc$ によって定めます．なお，このほかにも行列式をあらわす記号として $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ を用います．

(2) 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の**行列式**を

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

によって定めます．

補足 1.6 (1) は $+\begin{array}{|c|c|}\hline \bigcirc & \\ \hline & \bigcirc \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \\ \hline \end{array}$ と覚えましょう．

補足 1.7 (2) は $+\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bigcirc & & \\ \hline & \bigcirc & \\ \hline & & \bigcirc \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bigcirc & \\ \hline & & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & & \\ \hline & \bigcirc & \\ \hline \end{array}$

−

○		
		○
	○	

−

	○	
○		
		○

−

		○
	○	
○		

と覚えましょう．3 次の行列式の公式を**サラスの公式**といいます．

B— 行列式ですか ‥

A— 定義 1.15 では具体的に式で与えられているから，このとおりに計算すればいいということでしょう？

B— なぜこういう式なのかな …

A— それがわからないとちょっと気持ち悪いね．

発展演習 1.10　行列式の定義と「置換＝数字を並べる方法」との関係について考えてみましょう．

(1) 置換と，行列式の定義の式の単項式が対応しているでしょうか？たとえば $(2,3,1)$ という置換と対応している単項式はどれでしょう？

(2) 行列式の定義の式のそれぞれの単項式には符号がついていますが，符号はどのようなルールで決まっていると考えられるでしょうか？自分なりに想像してみましょう．

A— 1,2 を並べる方法，つまり置換が２通りあって，2 次の行列の行列式には単項式が２つ（ad と $-bc$）ある．3 次の場合にはそれが６つ（$a_{11}a_{22}a_{33}$ とか $a_{12}a_{23}a_{31}$ とか …）あるというわけか ……

B— なんとなくだけど，(2,3,1) という置換と

	○	
		○
○		

とが対応するような気がする．

A— どうして？

B— う～なんとなくなんだけど … 上の行から 2 番目,3 番目,1 番目みたいな？

A— はあはあ，なるほど．じゃあ，(3,2,1) という順列は

		○
	○	
○		

だね．上の行から 3 番目,2 番目,1 番目ということだから．

S— そうすると，6 通りの順列（あ，置換だったっけ）と，サラスの公式の６つの単項式とは対応がつくわけだね．

A— でもサラスの公式の符号の理由はわからないけど．

S— そう，サラスの公式の符号のルールが次の謎だな．

B— 左上から右下に並んでいるのがプラスだよ．見ればすぐわかる．

A— そういうことか …. 演習 1.10 でも「自分なりに」っていってるし．

S— いや〜僕もそう思ったんだけど，それってだめなんだよ．

A— （口をそろえて）え〜〜〜！

S— 4 次の行列式まで考えるとうまくいかないらしい．だって，1,2,3,4 の置換ってたくさんあって，たとえば (1,2,4,3) という置換には

○			
	○		
			○
		○	

が対応することになるだろう？

A— うんうん．

S— でも，この○の並びって「左上から右下」とかいう言葉では片付かないじゃない．

B— ぎゃ〜．そんなむつかしいのか．

S— 先生に聞くしかないな …

（後日）

S— 聞いてきた．授業ではやらないんだけれど「置換からきまる符号」というのがあるんだって．

A— 授業でやらないんじゃわからないな．それってすぐにわかることなの？

S— 数学できちんと定義すると結構大変みたいなこといってた．でも，アミダクジの橋の本数でもわかるんだって．

B— ナニ〜〜〜！なにそれ．

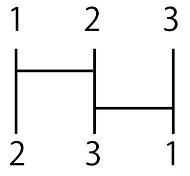
S— 置換をアミダクジでつくれるでしょう？

A— ….（汗）まあ，作ってみたことはないけど，アミダクジって置換をつくるよな．

S— そのとき，橋の本数が偶数だったらプラス，奇数だったらマイナスなんだって．

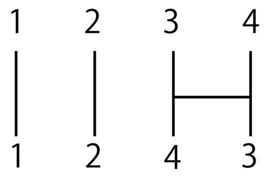
B— たとえば？

S— たとえば，(2,3,1) だったら



で橋が 2 本だからプラスとか．

A— じゃあ，(1,2,4,3) だったら？



で橋が 1 本だからマイナスってこと？

B— そんなんで決めちゃっていいわけ？数学として ⋯⋯

A— ディープだ ⋯⋯ 深すぎる ⋯⋯.

サク単！公式 1.8 (対角行列の行列式)　(1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ならば，$|A| = ad$ である．

(2) $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ ならば，$|A| = a_1 a_2 a_3$ です.

基本演習 1.11　(1) 上の公式が正しいことを確認してみましょう．

(2) 単位行列 I の行列式 $|I|$ を求めてみましょう．また，定数 c に対して，$|cI|$ はいくつでしょうか.

B— 次は公式 1.8 の対角行列の行列式

S— これはもともとの行列式の公式に入れてみればいいことだよね．ていうか，

○		
	○	
		○

の単項式しかないから，それが残る，という感じかな.

B— うん．演習 1.4(2)，単位行列は $a = d = 1$ で $b = c = 0$ だから $|I| = 1$ と.

A— 3 次でもそうなってるね？じゃぁ，$|cI| = c$ か．簡単だな.

S— うん．⋯ うん？ $\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = c^2$ じゃない？

A— あ，ほんとだ．え？じゃぁ，3×3 だと ⋯

S— $|cI| = c^3$ だよ．ひっかかるところだったぁ.

A— というか，ひっかかった．公式 1.9 も結局同じ感覚だね．

サク単！公式 1.9 (行列式の定数倍) (1) 2 の行列 A について，$|cA| = c^2|A|$（c は定数）です．
(2) 3 の行列 A について，$|cA| = c^3|A|$（c は定数）です．

基本例題 1.18 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とすると，

$$|2A| = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = (2\cdot 1)(2\cdot 4) - (2\cdot 2)(2\cdot 3) = 2^2|A|$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} |2A| &= \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{vmatrix} \\ &= (2\cdot 1)(2\cdot 3)(2\cdot 1) + (2\cdot 2)(2\cdot 4)(2\cdot 3) + (2\cdot 3)(2\cdot 2)(2\cdot 2) - \cdots \\ &= 2^3|A| \end{aligned}$$

標準演習 1.12 この公式が成り立つ理由を考えてみましょう．

サク単！公式 1.10 (行列式の積) $|AB| = |A|\cdot|B|$

基本例題 1.19 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ とすると，$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ です．$|A| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2, |B| = 5\cdot 8 - 6\cdot 7 = -2$ より $|A|\cdot$

$|B| = (-2) \cdot (-2) = 4$ です．一方で $|AB| = \begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix} = 19 \cdot 50 - 22 \cdot 43 = 4$ ですので，公式は成り立っています．

一般の 2 次の行列では，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とおいて，$|A||B|$ と $|AB|$ を計算してみればよいでしょう．3 次の行列式についても同じ方法で示せますが，大量の計算が必要です．

標準演習 1.13 一般の 2 次の行列の場合で，行列式の積公式が成り立つことを検算してみましょう．

B— 行列式の積の公式 1.10 は，計算してみるしか検算の方法はないのかな．

S— 計算しないで検「算」できればいいんだけどね．えーと，
$|A||B| = (ad - bc)(eh - fg) = adeh - adfg - bceh + bcfg.$
残りはおまえやれ．

A— $|AB| = \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg)$
はい，バトンタッチ！

B— ···· なってるよ．同じ．きっとなってるよ．

A— なに，その投げやりな態度．まぁ，$acef$ と $bdgh$ が消えるから大丈夫かな．

基礎問題 1.12 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

解答:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 5 \times 3 = -13$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= (-1)\cdot(-3)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-4) + 3\cdot 2\cdot(-2) \\ &\quad -(-1)\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot(-3)\cdot(-4) \\ &= 3 - 8 - 12 - 2 - 4 - 36 = -59 \end{aligned}$$

$\boxed{|\forall|}$

C— これは公式にあてはめてみれば計算できるね．

B— それだけ？

C— たぶん．うまいやり方とか教わっていないし．

B— そういえば，左上から右下へナナメにとるときはプラスで，右上から左したへナナメにとるときはマイナスだなぁと思ったんだけど．

A— そういうの「たすきがけ」っていうらしいよ．

C— 「たすきがけ」ってなに？駅伝で受け渡すのを「たすき」って言うけどねぇ．

B— たすきをバッテンになるように体に巻くってことかな？自信ないけど．

A— 4 次の時はたすきがけの行列式の公式はありません，って先生が言ってた．

B— 次の授業で代わりになるものを教えてくれるらしい．

標準問題 1.13 (1) 行列 A の行・列の役割を交換することを転置行列といい，${}^tA$ と書く．$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ならば ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ である．このとき，$|A| = |{}^tA|$ であることを確かめよ．
(2) 3 次の行列式でも $|A| = |{}^tA|$ が成り立つことを確かめよ．

解答:

(1) $|{}^tA| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とすると，${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ なので，

$$|{}^tA| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

であって，これは $|A|$ と一致している．

C— え〜〜(1) はまぁ定義の式そのままだからわかるけれど，(2) が何ですか？これ．

A— ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ っていうのはわかる？

C— つまり，行と列とを入れ替えた，ということだよね．

A— そう．で，サラスの公式で，$|{}^tA|$ を計算するわけだよ．

C— はあ，それで，こうなると．で，$|A|$ の式（講義）と一致してないのでは？

A— よく見ると一致している．たとえば $|A|$ には $+a_{13}a_{21}a_{32}$ というのがあるけど，$|{}^tA|$ だと $+a_{21}a_{32}a_{13}$ になってる．

C— そんなに細かく見るんですか．これって，4 次でも成り立つのかなぁ．

A— 先生はなりたつといってた．

標準問題 1.14 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 4 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 165$ である．以下の式の値はどうなるか．

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 18 \\ 4 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & -6 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 12 & -2 & 3 \\ 24 & -7 & -6 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & -7 & -6 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & -7 & -6 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & -6 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & -6 \end{vmatrix}$

解答: それぞれの答えはサラスの公式より直接求められる．(1) 第 1 行を 2 倍している．行列式は 2 倍の 330．(2) 第 1 列を 3 倍している．行列式は 3 倍の 495．(3) 第 1 行と第 2 行を交換した行列式は -1 倍の -165．(4) 第 1 行と第 2 行が同じである．行列式は 0．(5) 第 1 列と第 2 列が同じである．行列式は 0．(6) 第 1 列に第 2 列を加えた．行列式は変わらず 165．

B— 何これ？サラスの公式で求めればいいだけでしょう？
S— そうみたいだけど，暗に公式をほのめかしているよね．
A— 公式があるんだったら，いちいちサラスで計算するのはウマくないよね．
B— 特定の列や行を何倍かすると ····
A— 行列式もそれ倍になる．理由はともかく（笑）．(3) は行を交換すると符号が変わるって言うことだよね。
S— うん，あ！ちょっとわかったかも ···
A— 何.
S— 行を交換すると符号が変わる，ということは，(4) みたいに同じ行がある場合でも，1 行目と 2 行目を交換すると -1 倍でしょう？
A— あ，でも行列は変わらない ····
S— ということは行列式は最初から 0 じゃなければいけない！
A— 列でも同じことか．たぶんね．じゃぁ(5) もそういうことか.
S— (6) むつかしいな．なんだろう ···· 先生に聞きにいこう.

発展問題 1.15 正方行列 A が正則ならば，行列式 $|A|$ は 0 でないことを示せ．

解答: A が正則ならば $AA^{-1} = I$ である．この両辺の行列式を考えると，$|I| = 1$ より $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ である．したがって $|A| \neq 0$ である． |∀|

C— 証明はむずかしいよ．思いつかないよ．

S— 最初から決めつけなくてもいいとおもうんだけど …. このくらいなら

C— じゃあ，こういう感じで「示せ」って言われたらどうするの？

S— まず，A が正則の条件を書いてみる．

C— 何だっけ．

S— だから定義とか頭に入ってないと証明はつらいんだよ．

C— うーむ．じゃ，調べる …… 正則は …… 逆行列があること．

S— そうでしょう？で，それを式で書く．

C— 逆行列の式？って何だっけ？

S— だから定義とか頭に（以下同文）….

C— はいはい，調べますよ．あ，それが $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ってことね．でそれからどうするの？

S— 結論は何かを式で書いてみる．

C— 「行列式 $|A|$ は 0 でない」だから，$|A| \neq 0$ でいいかな．

S— （初めてマトモに言えたな，コイツ.）で，あとは使えそうな公式がないかどうかを調べる．

C— 「対角行列の行列式公式」かな？

S— 適当に言っていればいつかは当たると思ってるでしょう！使えるかどうか考えてからモノ言えよ．

C— $|A| = ad$ って書いてあるから，$ad \neq 0$ がいえればいいと．

S— （ピクピクピク … ）いまは「対角行列」じゃないでしょう！

C— （ナニ怒ってるの？）違うの？怖いから別のにする．$|AB| = |A| \cdot |B|$？

S— それで !!?（ハヤクシロヨナー）

C— $|AA^{-1}| = |A^{-1}A| = |I|$ かな？

S— あ〜〜もう！いい！あとは答えを見てくれ！

1.6　行列式の展開公式

問題 1.14 でみたように，3 次の行列式にはいくつかの公式がなりたちます．そのうちから基本的な 3 つを挙げてみましょう．

サク単！公式 1.11 (**行列式の基本公式**)　(1) 特定の列（または行）に定数 c 倍すると，行列式は c 倍になります．
(2) 特定の列（または行）についての和は，行列式の値の和になります．
(3) 特定の列と列（または行と行）の交換をすると，行列式の符号が逆になります．

基本例題 1.20　問題 1.8 で実例について計算してみてありますので，少し一般的な書き方をしてみましょう．

(1)
$$\begin{vmatrix} c\,a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c\,a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c\,a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

標準演習 1.14　これらの公式がなぜ正しいかを考えてみましょう．サラスの公式にあてはめてみて検算する方法が考えられます．たとえば (2) であれば次のような計算をして展開してみるのはどうでしょうか（計算は皆さんが完了させてください）．ほかの式でも同じように試してみましょう．

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= (a_{11}+a'_{11})a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}(a_{31}+a'_{31}) + a_{13}(a_{21}+a'_{21})a_{32}$$

$$-(a_{11}+a'_{11})a_{23}a_{32}-a_{12}(a_{21}+a'_{21})a_{33}-a_{13}a_{22}(a_{31}+a'_{31})$$

B— まずは行列式の基本公式だね.

A— 前の節の問題で検算したのが中心だな.

B— 演習 1.14 で計算を完了させろ，といわれてるけれど？

A— $(a_{11}+a'_{11})a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}(a_{31}+a'_{31})+a_{13}(a_{21}+a'_{21})a_{32}\cdots$ を

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\cdots$

$+a'_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a'_{31}+a_{13}a'_{21}a_{32}+\cdots$

と分ければいいということかな．右辺はサラスの公式の和になってるね.

B— (3) の列を交換すると符号が逆になる，っていうのはサラスの公式でそのまんま計算する以外に確かめる方法はないの？

A— すくなくともそのまんま計算すれば確認はできるよね.

B— 1・2 列目を交換すると $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bigcirc & & \\ \hline & \bigcirc & \\ \hline & & \bigcirc \\ \hline \end{array}$ が $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bigcirc & \\ \hline \bigcirc & & \\ \hline & & \bigcirc \\ \hline \end{array}$ になる，とかそういう話？

A— ぶるぶるぶる … それは難しいよ．符号がぴったりマイナスにならなけりゃいけないんでしょう？そういうことがいえればいいだろうけれど.

これらの基本的な性質から次の二つの性質が導かれます.

サク単！公式 1.12 (行列式の基本公式) (4) 同じ行（または同じ列）が 2 つあるような行列の行列式は 0 です.
(5) ある行を定数倍して別の行に加えても行列式は変化しません.

基本例題 1.21 (4) では，基本公式 (3) を使うと,

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\3&3&4\\5&5&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&2\\3&3&4\\5&5&6\end{vmatrix}$$ となり，この行列式は 0 です.

(5) $2\cdot\begin{vmatrix}1&1&2\\3&3&4\\5&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cdot1&1&2\\2\cdot3&3&4\\2\cdot5&5&6\end{vmatrix}=0$ です．これより，基本公式 (2) を使うと

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 1 & 2 \\ 2\cdot 3 & 3 & 4 \\ 2\cdot 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+2\cdot 1 & 1 & 2 \\ 2+2\cdot 3 & 3 & 4 \\ 4+2\cdot 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

となり，2 列目の 2 倍を 1 列目に加えても行列式が変わらないことがわかります.

B— ある列の定数倍を別の列に足しても行列式が変わらない，というのは，問題 1.78(6) ではナゾだったが，例 1.85 の計算でなんとなくわかった.

S— わざわざ 0 を足す，というところが裏技炸裂という感じか.

B— これは何がありがたいの？

S— 先生によると,「行列式の値を求めるときに，都合のよいように形を整えたり変形したりするのに便利」なんだってさ.

A— 特定の因数をくくりだしたりもできる，と言っていた．後で例が出てくるって.

B— へぇ.

サク単！公式 1.13 (3 **次の展開**)　サラスの公式を第 1 列を中心に見直してみます.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix} &= x(cf-de) - y(af-be) + z(ad-bc) \\ &= \begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ y & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} \end{aligned}$$

サク単！定義 1.16 (4 **次の行列式，展開公式**)　上の公式を参考にして，4 次の行列の行列式について，次の展開公式によってその値を定義します.

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ x_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$+ x_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - x_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

標準例題 1.22

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-6) - 2 \cdot (-15) + (-1) \cdot 0 - (-2) \cdot 3 = 30$$

A— 展開公式 1.13 ということだけど，サラスの公式は実は 3 つの部分にくくりだせる，ということだね.

B— で，4 次の行列式もそれで計算しろというわけか.

C— この計算例 1.22 の意味わからないんよ．$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ は何？

A— これは，4 次の行列式の展開公式の最初の項だから，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ という部分を見てるんだと思う.

C— ついでだから，次の項も教えてよ．

A— え〜〜〜〜〜〜〜 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ですか．

C— 結構根性いるな．これ．

B— あのさ，ふと思ったんだけど，基本公式で「形を整えるのに使う」と言ってたでしょ．これで，1 行目の (-2) 倍？を 2 行目に加えると，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2-2 & 1-4 & 0+2 & -1+4 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ とかできる？

A— できるかもしれないけど，何がありがたいのかわからない〜〜

B— だって，展開したとき，項が 1 つ減るでしょう？1 行目を 3 行目に足せば $(3,1)$ 成分が 0 になるし，1 行目の 2 倍を 4 行目に足せば $(4,1)$ 成分が 0 になるでしょう？

A— をを，言われたとおりにやってみたぞ．

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ -1+1 & 2+2 & -2-2 & 1-2 \\ -2+2 & 1+4 & 2-2 & -1-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ だな．

B— ここまでやれば展開したとき項が 1 つしかない！

A— $1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 30$ だ！

C— トータルで計算が楽になったかはビミョーだな．

B— ウルサイなぁ，いいじゃん，自分でみつけたやり方なんだから．

標準問題 1.16 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ を求めよ.

解答: 展開公式により, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 4 - 3 = 5$ $\boxed{|\forall|}$

B— これは展開公式でそのまんまだな.

S— 1 列めに 2 つ 0 があるから計算が半分で済むのがいいところだ.

B— これだけ？

S— たまにはすぐすむのがいい.

基礎問題 1.17 （ヴァンデルモンドの式）

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

解答:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1-1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1-1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(1 \cdot (c+a) - (b+a) \cdot 1) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

|∀|

A— サラスの公式で式を書き出した後に，因数分解をすればよいのでは？

S— それはそうだが，上の解き方のほうがスマートだな．まず 1 行目の (-1) 倍を 2 行目と 3 行目に足すわけだ．

A— そのあとで，2 行目から $b-a$ をくくりだして，3 行目から $c-a$ をくくりだしているわけだな．あれ，ナニ泣いてるの？

B— 先生に聞きにいったらかえって宿題出された〜〜〜

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

A— すげ〜．これもヴァンデルモンドの式なのか．

B— らしいよ．

基礎問題 1.18 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ を計算し因数分解せよ.

解答:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1-1 & b-a & b^3-a^3 \\ 1-1 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ 0 & c-a & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(1\cdot(c^2+ca+a^2)-(b^2+ab+a^2)\cdot 1)$$

$$= (b-a)(c-a)(c^2-b^2+(c-b)a)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \qquad \boxed{|\forall|}$$

A— $b^3-a^3=(b-a)(b^2+ba+a^2)$ の因数分解の式を使う以外は前と同じか ⋯⋯

S— 別の解きかた思いついた.

A— 聞きたい聞きたい.

S— この式は 1 行目と 2 行目を交換すると，符号がマイナスになるでしょう？

A— 行列式の基本公式の (3) だな.

S— だから $(b-a)$ で割り切れて．残りは a,b の対称式.

A— ちょっとまった，なんで？

S— 「交代式」の性質というか ⋯⋯，$b=a$ を代入すると 0 になるということから「因数定理」を使うと $(b-a)$ で割りきれて，a,b を交換すると $(b-a)$ が $(a-b)$ になるから，残りの部分は a,b を交換しても式が変わらない.

A— 高校の数学の知識のような気もするけど何かすごいな.

S— おんなじに考えて $(c-a)$ でも $(c-b)$ でも割り切れて，次数を数えると残りは 1 次式かつ対称式かつ係数は 1．だから $(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

A— ちょっとまった！飛びすぎだよ〜〜

前期中間試験

＜予習＞

- 1－1：行列の足し算，引き算，掛け算
- 1－2：転置行列，対称行列
- 1－3：単位行列，逆行列
- 1－4：トレース，べき
- 1－5：行列式
- 1－6：行列式の展開公式

前期中間試験

[1-1]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ とする．$2X + A = B$ を満たすような行列 X を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ とする．AB と BA を求めよ．

[1-2]

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，$A + 2B$ が対称行列になるような a を求めよ．

(2) 任意の正方行列 A について，$A + {}^tA$ が対称行列であることを証明せよ．

[1-3]

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求め，2 次正方行列 X であって，$X \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，A^3 を求め，その結果を用いて A^{-1} を求めよ.

[1-4]

(1) $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ に対して，$\mathrm{tr}(AB - BA)$ を要領よく求めよ.

[1-5]

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{vmatrix} = 1$ になるような定数 a を求めよ.

[1-6]

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$ を求めて因数分解せよ.

第 2 章

連立方程式

2.1 行の基本変形

＜予習＞

- 行列の積の定義を思い出しておきましょう．

C— 積 ⋯ なんだっけ

B— A の列の数と B の行の数が同じだったら積 AB が作れる ⋯ あとなんだっけ．

A— わからなくなったら前の授業メモに戻ろう．

サク単！定義 2.1 (**基本行列**) (1) 異なる i, j に対して，単位行列 I の i 行と j 行を交換した行列を $P(i, j)$ とします．たとえば 3 次正方行列では
$P(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ です．

(2) i と（0 でない）実数定数 c に対して，単位行列の (i, i) 成分を c に置き換えたものを $Q(i; c)$ とします．たとえば 3 次正方行列では
$Q(1; -2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ です．

(3) 異なる i, j と実数定数 c に対して，単位行列の (i, j) 成分を c に置き換えたものを $R(i, j; c)$ とします．たとえば 3 次正方行列では
$R(1, 2; -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 上の 3 種類の行列を**基本行列**といいます．

A— 連立方程式，という単元に入ったけれど ⋯

B— まずはその準備ということらしいね．

A— 基本行列というと，行列の大きさはいろいろなのかな？

B— 定義 2.1 では「たとえば 3 次の正方行列では」と断っているね．

A— それなら，4 次の正方行列では $P(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ でいいのかな.

B— そういうことなのかな．一応先生に確認したほうがいいな.

C— ; の記号は何？コレ？

A— セミコロン

C— へ？

A— 記号の名前だよ．ちなみに : という記号もあるけど，これは「コロン」と呼ばれる.

B— ためになるなぁ.

サク単！公式 2.1 (基本行列の性質) 基本行列の行列式は 0 ではありません.

補足 2.1 理由を説明しましょう． まず $P(i,j)$ の行列式についてですが，単位行列の行列式は 1 でした．行を交換すると行列式は -1 倍なので，$|P(i,j)| = -1$ だとわかります.

次は $Q(i;c)$ です．特定の行を c 倍すると行列式も c 倍になりますので，$|Q(i;c)| = c$ だとわかります．いま $c \neq 0$ ですから行列式は 0 ではありません.

最後に $R(i,j;c)$ ですが，これは単位行列からはじめて j 行めの c 倍を i 行めに加えると作ることができますので，$|R(i,j;c)| = 1$ とわかります.

標準演習 2.1 上の解説に用いられた行列式の性質はどの性質でしょうか.

B— $|P(i,j)| = -1$ だとわかるには ⋯

A— 行の交換だから，行列式の基本公式の (3) だね.

S— $Q(i;c)$ は単位行列の i 行目だけを c 倍しているわけだから，行列式も c 倍．というのは基本公式の (1) だね.

B— おう，調子いいなぁ．じゃぁ $R(i,j;c)$ は？

S— （汗）⋯ j 行目の c 倍を i 行目に足しているのかな？そしたら基本公式の (5) ⋯でいい？

A— うん，大丈夫だと思う.

サク単！公式 2.2 (基本行列の性質 2) 基本行列は正則行列です．実際に次の式が成り立ちます．

(1) $P(i,j)P(i,j) = I$

(2) $Q(i;c)Q(i;1/c) = I$

(3) $R(i,j;c)R(i,j;-c) = I$

基本例題 2.1 (1) $P(1,2)P(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

(2) $Q(1;-2)Q(1;-1/2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $R(1,2;-2)R(1,2;2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

基本演習 2.2 上の例を見ながら，基本行列の逆行列を求めてみましょう．

サク単！定義 2.2 (基本変形) **行の基本変形**を次の 3 種類の操作であるとします．

(1) 異なる i,j に対して，i 行目と j 行目を交換．(行の交換)

(2) i と（0 でない）定数 c に対して，i 行目を c 倍．(行の定数倍)

(3) 異なる i,j と定数 c に対して，j 行目の c 倍を i 行に加算．(行の加算)

基本例題 2.2 （1 行目と 2 行目の交換）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

（1 行目を (-2) 倍） $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-2&-4&-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

（2 行目の (-1) 倍を 1 行目に足す）

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1-4&2-5&3-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&-3&-3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

A— で，なんだよ，この基本変形っていうのは．行列を書きかえたら別の行列になるでしょう？

S— なるねぇ．

A— そういうことしちゃっていいわけ？

S— さぁ？そういう深遠な質問に答えられる人はこの中にはいないよ．

A— 連立方程式との関係も見えてこないしね．先生に聞いてくる．

サク単！公式 2.3 (基本変形と基本行列の関係)　基本変形と基本行列の関係は次のとおりです．

(1) 行列 A の i 行目と j 行目の交換をしたものは，$P(i,j)A$ です．

(2) 行列 A の i 行目を c 倍したものは，$Q(i;c)A$ です．

(3) 行列 A の j 行目の c 倍を i 行目に足したものは，$R(i,j;c)A$ です．

基本例題 2.3　（1 行目と 2 行目の交換）

$$P(1,2)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}$$

（1 行目を (-2) 倍）

$$Q(1;-2)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-4&-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

（2 行目の (-1) 倍を 1 行目に足す）

$$R(1,2;-1)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3&-3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

基本演習 2.3　上の例の行列の積を検算してみてください．

A— 聞いてきた．連立方程式の係数のならびを行列にして考えるんだって．

B— 基本変形との関係は？

A— 「1 つの行を定数倍する，というのは連立方程式のある式を両辺定数倍する，ということに対応する」んだって．

B— どういうこと？

A— 僕もよくわからない．

S— あ，わかったかも． $\begin{cases}x+2y=3\\4x+5y=6\end{cases}$ の係数の並びは $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ とかだよね．

A— 右辺も一緒にならべちゃっていいのかな．まぁいいか．で？1 行目を 2 倍するとかいうと？

S— うーん， $\begin{pmatrix}2&4&6\\4&5&6\end{pmatrix}$ とかか？

A— 式だと $\begin{cases}2x+4y=6\\4x+5y=6\end{cases}$ ということか．なるほど，一応（解ける方向には進んではいないが）連立方程式を操作することになっているわけだ．

B— ほかの基本変形は？行の交換とか？

S— $\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}4x+5y=6\\x+2y=3\end{cases}$ てことだな．

A— 式の交換ということか．これも解ける方向には進んでいるとは思えないけれど，一応，式を操作しているわけだ．

B— 1 行目の 2 倍を 2 行目に足すとかは？

S— $\begin{pmatrix}1&2&3\\4+\boxed{2}&5+\boxed{4}&6+\boxed{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\6&9&12\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}x+2y&=3\\6x+9y&=12\end{cases}$

A— っていうか，左下の 4 を消せるんじゃない？1 行目の (-4) 倍を 2 行目に足すと，どうなる？

S— $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & =3 \\ & -3y & =-6 \end{cases}$

A— おお！じゃあ，2 行めを (-3) で割って

S— $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & =3 \\ & y & =2 \end{cases}$

A— だんだんと解けてる気がしてきた！基本変形の技だな！

S— 続きは次の回できちんと教わろう．

基礎問題 2.1　3 次正方行列の場合で $P(1,3)$, $Q(2;3)$, $R(2,1;-1)$ を具体的に書け

解答:

$$P(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q(2;3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(2,1;-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

|∀|

B— これは定義に従って書いてみればよい．

A— 基本行列と基本変形はどっちが大切なんだろう？

B— たぶん基本変形？

A— だよね．なんとなく．

基礎問題 2.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ からはじめて (1) 1 行目と 3 行目の交換，(2) 2 行目を 3 倍，(3) 1 行目の (-1) 倍を 2 行目に加えた行列をそれぞれ書け.

解答: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 1 & 3\cdot(-3) & 3\cdot(-1) \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -9 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1-1 & 1-2 & -3-2 & -1-2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

|∀|

B— 今気がついた！

C— 何を？

B— 基本変形って，正方行列でなくてもできるんだ.

A— そう言われればそうだね．行の交換とかだったら正方形にかぎらない.

B— 作業としては正方行列でもそうでなくとも変わらないよね.

C— うん.

> **標準問題 2.3**　ためしに，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ の**右から** $P(1,3)$, $Q(2;3)$, $R(2,1;-1)$ をそれぞれかけてみよ．観察されたことを述べよ．

解答:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 9 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

列に関する「交換」「定数倍」「列の加算」操作になる．　|∀|

B— これはひっかけだ〜〜〜

C— どしたの？

B— フツウに $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を計算すればいいと思ったわけダヨ．

C— だめなの？いいじゃない．

B— 行列の大きさがあってなくて積がつくれない ····

C— マジ？あ〜ホントだ．どういうことなんだろう？

B— 答えをみたら，場面場面に応じて，基本行列の大きさを変える，ということらしい．

C— なるほど，積を作れる大きさの基本行列を使え，なんて先生，そんなこと言ってなかったよ〜〜〜

B— うっかりだったと善意に解釈してあげよう．

2.2　掃きだし法

＜予習＞

- 行の基本変形の種類を思い出そう.

C— 「行の交換」「行の定数倍」「行の加算」の３つだね！

A— 身についてるんだ〜えらいなぁ.

C— いまさっきノートを見ただけだけど.

A— 使えるようになろうね.

サク単！定義 2.3 (列の掃きだし法)　行列 A の (i,j) 成分が a_{ij} と表されているとします. (つまり $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)}$ とします. **もし** (p,q) **成分** a_{pq} **が** 0 **でないとき，**以下の手順で (p,q) 成分に関する列の掃きだしを行うことができます.

(1)　第 p 行を $1/a_{pq}$ 倍します. この結果, (p,q) 成分は 1 になります.

(2) 第 1 行に第 p 行の $-a_{1q}$ 倍を加えます. この結果, $(1,q)$ 成分は 0 になります.

(3) 第 2 行に第 p 行の $-a_{2q}$ 倍を加えます. この結果, $(2,q)$ 成分は 0 になります.

(4) 以下同様の作業を第 p 行以外の行に対して行います. この作業により, 行列の第 q 列に着目すると, (p,q) 成分は 1 に, そのほかはすべてが 0 になります.

基本例題 2.4　列の掃きだし法の実例. たとえば, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の $(2,3)$ 成分に関する列の掃きだしをしてみましょう. $p=2, q=3$ で考えることにしています. つまり $a_{pq} = a_{23} = 4$ です.

C— 実例の途中ですが！ $a_{23} = 4$ がわかりません！

A— $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ を比較してみて，a_{23} のところにある数字はなに？

C— 4 か！ああ，この 4 なんだね．

(1) に従って,「第 p 行を $1/a_{pq}$ 倍します.」$p = 2$ ですから「第 2 行を 1/4 倍します.」を実行すればいいですね.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{4}\cdot 6 & \frac{1}{4}\cdot 5 & \frac{1}{4}\cdot 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

この結果 $(p, q) = (2, 3)$ 成分は 1 になりましたね？

(2) に従って,「第 1 行に第 p 行の $-a_{1q}$ 倍を加えます.」p は 2，$-a_{1q}$ は $-a_{13}$ だから -1 ですね．要する第 2 行の -1 倍を第 1 行に加える作業をします.

$$\begin{pmatrix} 3-\frac{3}{2} & 2-\frac{5}{4} & 1-1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

この結果 $(1, q) = (1, 3)$ 成分は 0 になりました.

次は (3) なのですが，(4) のところに「以下同様の作業を第 p 行以外の行に対して行います.」と書いてあって，いまは $p = 2$ ですから，第 2 行は飛ばして，第 3 行へ行きます．ここでも行の加算を用いて $(3, 3)$ 成分を 0 にする作業をします.「第 3 行に第 p 行の $-a_{3q}$ 倍を加えます.」ということで,「第 3 行に第 2 行の (-9) 倍を加える」ことになります.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 7-9\cdot\frac{3}{2} & 8-9\cdot\frac{5}{4} & 9-9\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{13}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

これで，第 3 列は，$(2, 3)$ 成分が 1 でそのほかは 0 になりました.

B— ルービックキューブで，1 列（3 個）をそろえる作業みたいだね！

A— おかげで，ほかの数はばらばらになったけどね.

B— 「4 分の ⋯ 」がでちゃうのは，$a_{23} = 4$ だったから？

A— たぶんね．ここの成分が 1 だったら，分数にならないんじゃない？

サクタン線形代数

B— 最初に割る作業がなくなるからね.

A— じゃあ，$(1,3)$ 成分で列の掃きだしをすると？

S— $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 - 4\cdot 3 & 5 - 4\cdot 2 & 4 - 4\cdot 1 \\ 7 - 9\cdot 3 & 8 - 9\cdot 2 & 9 - 9\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -3 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ だな

A— 一発でできる君がうらやましいよ.

基本例題 2.5　ここでは，$(1,1)$ での列の掃きだし，$(2,2)$ での列の掃きだし **⋯** を続けることによって，**左上から右下にかけて** 1 **が並ぶようにできるかどうか**を試してみましょう．次の例はどうでしょうか？ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1 行目を 1/2 倍

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot(-1) & \frac{1}{2}\cdot 3 \\ -4 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -4 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 列目を掃きだし

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -4 + 4\cdot 1 & 2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & -7 + 4\cdot\frac{3}{2} \\ -1 + 1\cdot 1 & 1 + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 2 + 1\cdot\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$(2,2)$ 成分が 0 になってしまったので，$(2,2)$ に関する掃きだしができません．こういうときは (1) 下のほうにある行との交換，または (2) 右側にある列との交換を行うことによって $(2,2)$ が 0 でないようにしておくことが大切です．いまは，2 行と 3 行を交換すればよさそうなので，そのようにします．

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

続行しましょう．2 行目を 2 倍して

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2\cdot 0 & 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 列目を掃きだして

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(3,3)$ に関して掃きだして（細かい計算は省略します.）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5-5 \\ 0 & 1 & 7-7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B— ほう，行の基本変形を繰り返しているうちに単位行列にまで変形できた.

C— 「左上から右下にかけて 1 が並ぶようにできるか」がどうして大切なんだ？

B— いやぁ，これだけじゃあそういうことは分からんだろう.

A— とりあえずは「できた」ことを祝おう.

C— よっし，乾杯だ.

基本例題 2.6　別の例を考えてみましょう．今度は $(1,1)$ に関する掃きだしが終了しているものとして，次のような形だったらどうすればよいかを考えます.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(A の場合）　これは，2 行目と 3 行目を交換することにより，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とできて，あとは $(2,2)$，$(3,3)$ で順に単位行列にできます.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+1\cdot 1 \\ 0 & 1 & 2-2\cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B の場合)　これは，2 行目と 3 行目を交換することにより，

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

とできて，あとは $(2,2)$ で掃きだすと

$$\begin{pmatrix}1 & 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となって，$(3,3)$ 成分が 0 であることから，これ以上の作業は不可能です．

(C の場合)　これは，2 行目と 3 行目を交換することにより，

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ですが，さらに 2 列目と 3 列目を交換しないと $(2,2)$ で掃きだせません．

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

それで，計算は略しますが，$(2,2)$ で掃きだすと

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となって，$(3,3)$ 成分が 0 であることから，やはりこれ以上の作業は不可能です．

B— 下 1 列が全部 0 になってしまったら作業は続けられない，ということだな．

A— 逆に言えば，1 個でも 0 でないものがあれば，列や行の交換を使ってそれを $(2,2)$ のところへ持ってこられればいいということか．

B— あ〜自分で実際にやってみないと感覚つかめてないかも．

A— やってみようぜ．

サク単！定義 2.4 (連立方程式の標準形) 次のような形をしている行列を連立方程式の標準形といいます．ただし，右側の $*$ は「任意の数によるブロック」の意味で，下の O は「すべて成分が 0 であるようなブロック」の意味です．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right)$$

基本例題 2.7 $\left(\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

はいずれも標準形です．

発展 2.2 この教科書では「行の基本変形＋列の交換」を使って「連立方程式の標準形」が得られることを解説しました．行列の標準形についてはいくつかの流儀があります．

(1) まずはこの教科書のように,「行の基本変形＋列の交換」を用いて

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right) \quad \cdots \text{(連立方程式の標準形)}$$

にすること．

(2) 「行の基本変形」のみを使って

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 & * & * & 0 & * & *\cdots \\ & & & 1 & * & * & 0 & * & *\cdots \\ & & & & & & 1 & * & *\cdots \\ & O & & & & & & & \end{pmatrix} \quad \cdots \text{(階段行列)}$$

の形にすること．この方法は列の交換をしなくてよいので計算は単純化されています．その代わりに，不定解を書き出すのに神経を使います．

(3) 「行の基本変形，列の基本変形」を使って

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right) \quad \cdots \text{(標準形)}$$

にすること．この方法では連立方程式を解くことはできませんが，階数を的確に求められることや，階数に関する定理を証明するのに理解しやすい，といった利点があります．

B— 「基本変形をして標準形にする」というポリシーはかわらないが ⋯
A— その方向性は３種類ある，と
C— １種類だけでいいよ．とりあえず．
B— じゃぁ,「行の基本変形＋列の交換」で「連立方程式の標準形」ということで．
A— あとは計算を出来るようにしておけばよいと．

基礎問題 2.4 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ について $(2,2)$ に関する列の掃きだしをせよ．

解答: $(2,2)$ 成分は -3 であるので，2 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍する．

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3}\cdot 1 & -\frac{1}{3}\cdot(-3) & -\frac{1}{3}\cdot 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2 行目の (-2) 倍を 1 行目に加える．

$$\begin{pmatrix} 4 - 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 2 - 2\cdot 1 & 1 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2 行目の 1 倍を 3 行目に加える．

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2+\left(-\frac{1}{3}\right) & -1+1 & -2+\left(-\frac{2}{3}\right) \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{8}{3} \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2 行目の (-3) 倍を 4 行目に加える．

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{8}{3} \\ -1-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 3-3\cdot 1 & 0-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

C— いちいちここまで丁寧に書かなくていいんでしょう？

B— ここまで書けば計算ミスはないとおもうけど，さすがに面倒だな．

C— だよね．

基礎問題 2.5 $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ を行の基本変形と列の交換で「連立方程式の標準形」に変形せよ．

解答: このままはじめても良いが，最初から分数が出ないようにまず 1 行目と 3 行目を交換する．

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$(1,1)$ に関する掃きだしを行う．

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -3 \\ -3+3\cdot 1 & 2+3\cdot(-4) & 1+3\cdot 2 & 4+3\cdot(-3) \\ -5+5\cdot 1 & 0+5\cdot(-4) & 4+5\cdot 2 & 5+5\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & -10 & 7 & -5 \\ 0 & -20 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

2 行めを -10 で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & -20 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

$(2, 2)$ に関する掃きだしを行う.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 + 4 \cdot 1 & 2 + 4 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) & -3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & -20 + 20 \cdot 1 & 14 + 20 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) & -10 + 20 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

｜∀｜

B— $(2, 2)$ で掃きだしした段階で，第 3 行が全部 0 になってしまったわけだ.

C— じゃあ，ここで作業はおしまい，標準形が得られました，と言っていいわけだね.

B— これは練習しないと要領がつかみにくいよう〜〜.

2.3 連立方程式の解法

<予習>

- 基本変形を思い出そう
- 掃きだし法を思い出そう

— 基本変形って,「行の交換」と「行の定数倍」とあとなんだったっけ ⋯⋯
— 「行の加算」だね.
— 何を加算していいんだったっけ ⋯⋯
— 行の何倍かを他の行に加えていい, っていうルールだよ.

サク単！定義 2.5 (連立方程式の解) 連立一次方程式（一次方程式系）とは, いくつかの文字変数の 1 次方程式がいくつか集まったもののことをいいます. たとえば

$$\begin{cases} -5x & & +4z & +5w & =4 \\ -3x & +2y & +z & +4w & =1 \\ x & -4y & +2z & -3w & =2 \end{cases}$$

のようなものです. 以降は簡単のため「連立方程式」とだけ呼ぶことにします. 連立方程式の解は 3 種類あります.「一意解」「不定解」「解なし」です.「一意解」はたとえば,
$x=1, y=2, z=3, w=4$
のように, 解が 1 通りに限られるものをいいます.「不定解」はたとえば,
$x=1+2a, y=2+3a, z=3+4a, w=4+5a$
のように, パラメーターと呼ばれる文字変数を含むような形の解のことをいいます.「解なし」は文字通り方程式を満たす解がない場合をいいます.

基本例題 2.8 解がひとととおりの例をあげましょう.

$$\begin{cases} -5x & +3y & =1 \\ -3x & +2y & =1 \end{cases}$$

このような連立方程式を解くには文字変数を消去することが重要です．第 1 式より $5x = 3y - 1$ であって $x = \frac{3y-1}{5}$ です．これを第 2 式に代入すると
$-3\frac{3y-1}{5} + 2y = 1$ で，整理して $y = 2$ を得ます．これを第 1 式に代入しなおして $x = 1$ を得ます．つまり個の連立方程式は 1 通りの解があり,「一意解」であることがわかります.

— これは中学でならったな.
— 代入法と言っていた.
— 消去法じゃない？
— 消去法というのは (第 1 式)×2−(第 2 式)×3 を計算して y を消す，という方法だったような気がする.
— そっか．どっちで解いてもいいんだよね.

基本例題 2.9　不定解の例をあげましょう.

$$\begin{cases} -5x & +3y & +2z & =1 \\ -3x & +2y & -z & =1 \end{cases}$$

このように，文字変数の個数よりも式の個数のほうが少ない場合には，ただひとつの解を求めることは期待できません．解が不定のときには，いくつかの文字変数が残る形で解が求まると考えられます．この**残った文字変数**のことを**パラメーター**といいます.

もし，文字変数（ここでは x, y, z の 3 つ) のうち，どの文字を残すべきかがはっきりわかっていれば，その文字を定数のようにみなして従来の方法で解いてしまえばよいことになります．たとえば，上の例で，z を定数のようにみなして x, y の連立方程式と考えてとけば，x, y が z の式で表せることになります.

実際に，(第 1 式)×2−(第 2 式)×3 を計算すれば，途中計算は略しますが，$x = 7z + 1$ を得ますし，これを第 1 式に代入すれば $y = 11z + 2$ を得ます．ここで $z = s$ とおけば，$x = 7s + 1, y = 11s + 2, z = s$ という不定解を得ることができました．ここでのパラメーターは s の 1 つです．ここで解の次元について定義しておきましょう.

サク単！定義 2.6 (解の次元) 連立一次方程式の解において，パラメーターが最大 d 個あるような不定解をもつとき，**解の次元**は d であるといいます．一意解があるときには解の次元は 0 とします．まれにですが「解なし」のことを解の次元が負であるということもあります．また，解の次元のことを**自由度**ということもあります．

基本例題 2.10 上の

$$\begin{cases} -5x & +3y & +2z & =1 \\ -3x & +2y & -z & =1 \end{cases}$$

は $x = 7s + 1, y = 11s + 2, z = s$ というパラメーターを 1 つ持つ不定解がありましたので，解の次元は 1 ということになりそうです．

— どうして「なりそうです」なんだ？
— パラメーターは 1 つだよな ⋯⋯
— だったら次元も 1 でいいじゃないかな ⋯
— 不定解のパラメーターの個数が**2つではなく1つである**ことを示さないといけない？とか？
— え〜〜〜それは ⋯ 明らかなんじゃないの？だって，求めたらパラメーターが 1 つだったわけだし．
— まぁだから,「明らかに 1 次元」と思えるような理由づけがほしいということかな．
— 数学って，所詮理屈なんだね．

標準例題 2.11 解がない例を挙げましょう．

$$\begin{cases} x & +2y & =3 \\ 2x & +4y & =1 \end{cases}$$

(第 1 式)×2−(第 2 式) を計算すると，$0 = 5$ となり，これは正しくない式です．このことから，この連立方程式を満たすような x, y は存在しないことになります．(細かいことをいうと，連立方程式の解が存在すると仮定すると，$0 = 5$ という矛盾が導かれるので，背理法により解が存在しないことが示されます．)

— こんなの習ったことない．
— あれ？中学でどうしてこういうのを習わなかったんだろう？
— 式としてはありふれた形だよな．

— 中学校の先生がわざわざ「解なし」問題をよけて出題していたとしか思えない.
— そんな隠された秘密があったのか ⋯⋯

サク単！公式 2.4 (**連立方程式の解き方 (1)**) 以下の方法によって連立方程式を解けば,「一意解, 不定解, 解なし」の判定ができる上にすべての解を求めることができます.
まず, 係数の並びを行列に置き換えましょう. 文字変数の係数だけを並べて行列にしたものを**係数行列**, 定数項までを含めて並べて行列にしたものを**拡大係数行列と呼びます.**

基本例題 2.12 $\begin{cases} -5x & +3y & +2z & =1 \\ -3x & +2y & -z & =1 \end{cases}$

この係数行列は $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ です. 拡大係数行列のばあいには, 定数項は右辺にあるものとして書きます.

— おお, 中学校以来の「連立方程式の解き方」!!
— どんだけ難しいんだとおもったら, まずは行列を作ればいいとさ.
— 定数項が右辺だ, っていうのは？
— たとえば $\begin{cases} -5x & +3y & -1=0 \\ -3x & +2y & -1=0 \end{cases}$ だったら $\begin{cases} -5x & +3y & =1 \\ -3x & +2y & =1 \end{cases}$ って変形して $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ にする.

サク単！公式 2.5 (**連立方程式の解き方 (2)**) 念のために, 拡大係数行列のおのおのの列の上に文字変数を書いておきます. ここでは数字と混ざらないようにカッコをつけて書きましたがカッコはなくとも大丈夫です.

基本例題 2.13 $\begin{cases} -5x & +3y & +2z & =1 \\ -3x & +2y & -z & =1 \end{cases}$ だったら $\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$

です.

— 定数項の上には文字を書くことはできないよね.
— 仕方ないね.

サク単！公式 2.6 (**連立方程式の解き方 (3)**) 一番右の列は右辺に当たりますので，それ以外の部分，つまり一番右側の列を除いた部分について，行の基本変形と列の交換をもちいて,「連立方程式の標準形」を目指します.

基本例題 2.14 実際にやってみましょう．まず 1 列目を $-\frac{1}{5}$ 倍して

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot -5 & \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 3 & \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 2 & \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

1 列目を掃きだして

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -3+3\cdot 1 & 2+3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) & -1+3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 1+3\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \end{pmatrix}\end{array}$$

$$= \begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\end{array}$$

次は 2 行目を 5 倍します.

$\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -11 & 2 \end{pmatrix}\end{array}$ となって，2 行目の $\frac{3}{5}$ 倍を 1 行目に加えると

$\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z) & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 2 \end{pmatrix}\end{array}$ となって完成です.

基本演習 2.4 上の計算を検算してください.

サク単！公式 2.7 (連立方程式の解き方 (4)) 「連立方程式の標準形」＋「一番右側の列（右辺定数部分）」が得られます．もし右下の?の部分が 0 でなかったならば，この連立方程式は「解なし」になります．? = 0 の場合には,「*」の部分がパラメーターになります．このことを念頭において，式を元に戻します.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
1 & & 0 & * & \cdots & * & \text{右} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\
0 & & 1 & * & \cdots & * & \text{辺} \\
\hline
 & O & & & O & & ?
\end{array}\right)
$$

基本例題 2.15 $\begin{pmatrix} (x) & (y) & (z) & \\ 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 2 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x \qquad -7z = 1 \\ \quad y \ -11z = 2 \end{cases}$ ですが,

z が**パラメーターであることより右辺へ移項します.** $\begin{cases} x = 7z + 1 \\ y = 11z + 2 \end{cases}$

ここで，パラメーターとなった文字を別の文字（たとえば s）に置き換えて $x = 7s + 1$, $y = 11s + 2$, $z = s$ と不定解が求まります.

— 結局手で計算したときを同じ結果だな.

— こっちのほうが計算が大変だと思うけれど，どこがうれしいのかよくわからない.

先生： この変形は基本変形を使っているということで,「答えの正確さが保障されている」という意味でうれしいのです.

— あわあわあわ ⋯ 先生，そうなんですか.

— ということは，この方法で求めると,「解は 1 次元」と断言していいんですね.

先生： そのとおりです．公式から，解の次元は 1 だと求まります.

— 「解なし」の例はどうですか？

先生： $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ なら, $\begin{pmatrix} (x) & (y) & \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (x) & (y) & \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ となって,「解なし」だとわかります.

基礎問題 2.6　連立方程式 $\begin{cases} x & -y & +3z & =4 \\ -2x & +2y & -5z & =-2 \\ -x & +y & -2z & =2 \end{cases}$ の解は「一意解，不定解，解なし」のうちどれか．解の次元を求めよ．

解答:　拡大係数行列は $\begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ である．

まず $(1,1)$ で掃きだすと（途中計算は略す）$\begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

ここで 2 列目と 3 列目を交換する．$\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$(2,2)$ で掃きだすと $\begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

この形から，y にあたる部分がパラメーターであることがわかり，$\begin{cases} x & =-14+y \\ z & =6 \end{cases}$ ともとまる．y を s をおけば，解は

$x=s-14,\ y=s,\ z=6$ と求まり，不定解で解の次元は 1 である．　$\boxed{|_{\forall}|}$

— こういう風に列の交換を使うのか ····

— 列ごとに文字変数の名前を書いておく理由がわかったよ．

標準問題 2.7 次の連立方程式が解をもつような k の値を定めよ．

$$\begin{cases} x \quad +2y \quad -z \quad = 2 \\ 2x \quad -y \quad +3z \quad = 9 \\ -x \quad +2y \quad -3z \quad = k \end{cases}$$

解答: 拡大係数行列は $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & k \end{pmatrix} \end{array}$ である．$(1,1)$ で掃きだして

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2-2 & -1-4 & 3+2 & 9-4 \\ -1+1 & 2+2 & -3-1 & k+2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & k+2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(2,2)$ で掃きだして

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2-2 & -1+2 & 2+2 \\ 0 & -\frac{1}{5}\cdot(-5) & -\frac{1}{5}\cdot 5 & -\frac{1}{5}\cdot 5 \\ 0 & 4-4 & -4+4 & k+2+4 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+6 \end{pmatrix} \end{array}$$

以上で係数行列の部分を連立方程式の標準形にすることができた．一番下の式は $0 = k+6$ という式であり，これが成り立つためには $k = -6$ である．参考までに，解も求めておこう．標準形を元に戻して，(z はパラメーターなので右辺へ移項して）$\begin{cases} x = -z+4 \\ y = z-1 \end{cases}$ を得る．$z = s$ とおいて，

$x = -s+4, y = s-1, z = s$ が解（不定解）である． |∀|

— 基本的な作業は同じなんだな．

— 拡大係数行列を作って，連立方程式の標準形をめざす！

— k の値を定めよ，と聞かれている以上，何かしら値が求まるような問題なんだろうね．結局一番下の行の右端が 0 になればよい，という手筋を使えばよいと．

— 解が存在するための条件をみたすように k を定める，というわけだ．

2.4　階数

<予習>

- 行の掃きだし法をおもいだそう
- 解が不定のときとはどういうことか

— 行の掃きだしとは，行の基本変形を使って，ある列を $0, 1, 0, 0$ みたいな数の列にすること！

— ま，だいたいそういうことだけど，まず 1 にしたいところを定数倍で 1 にして，あとは行の加算をつかって，その列の残りの成分を全部 0 にする，ということだな.

— 何べんもやらされたので，実はちょっと夢に出た.

— え〜〜掃きだしが夢に出るくらい勉強してるんすか！尊敬します.

— 連立方程式の不定解とは …. なんだっけ.

— 要するに，解がひとつに決まらないということでしょう.

— 文字が残ってしまうような解？

— そういうことか.

今回は「計算編」ではなく「理論編」です．前回の解の次元を復習して，そこから導入される「階数」という考え方を学びましょう．この階数は，後で出てくる基底の考え方にも通じる大切な概念です.

サク単！定義 2.7 (**連立方程式の解の次元**)　連立一次方程式の解において，パラメーターが最大 d 個あるような不定解をもつとき，解の**次元**は d であるといいます．また，解の次元のことを**自由度**ということもあります.

参考 2.3　「最大 d 個」の意味がわかりにくいので解説しましょう．とても極端な例ですが，$x + 2y - 3z = 1$ という 1 つの式からなる連立方程式を考えましょう.（式が 1 つしかないときは「連立」とは呼びにくいのですが，よいことにします.）文字変数が 3 つ，式が 1 つですから，文字変数が 2 つ余ることになります．ここでは y, z を定数のように考えて，x について解くことによって,

$$x = -2y + 3z + 1$$

を得ます．ここで，$y = s$，$z = t$ とおけば，この方程式の解は

$$x = -2s + 3t + 1, y = s, z = t$$

と求まります．パラメーターが 2 つありますので，解の次元は 2 です．それでは この問題に対して，

$$x = -2s + 1, y = s, z = 0$$

と答えたらどうでしょうか？これも方程式 $x + 2y - 3z = 1$ を満たしますし，パラメーターを含むような不定解です．でも，私たちはこれが「解のすべてではない」ことがわかっていますので,「パラメーターの個数が足りない」と思うわけです．ですからパラメーターが 1 つであるような不定解は十分ではなく，解の次元は 2 である，と判断できるわけです．

いまの問題はとてもわかりやすい例だったのですが，もっと複雑な問題に対しても，パラメーターの個数が最大で現れているとわかる方法があるでしょうか？実は基本変形を用いて標準形を得るということがそのことを保障するのです．

サク単！定義 2.8 (階数，ランク)　行列 A を基本変形によって「連立方程式の標準形」へと変形できたとします．このときの「0 でない行」の数を**階数**または**ランク**といって，$\mathrm{rank}A$ と書くことにします．

基本例題 2.16　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると，これは 2.2 節で解説したとおり，行の基本変形を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ という連立方程式の標準形にすることができました．ここではすべての行が「0 でない行」なのでその数は 3 となります．したがって，

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

とわかります.

2.2 節に出てきた別の例 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ では，行の基本変形によって

$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ とできました．ここでは「0 でない行」は 1 行目と 2 行目の 2

つですから，$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}=2$ ということになります.

— 階数だってさ.

— ともかく標準形にできればいいんでしょう？それで，0 にならなかった行を数えればいいわけだ.

— じゃぁ,「階数を求めよ」っていわれたら，まずは連立方程式の標準形を求めて，あとは数えればいいわけだね.

— ちょっと気になるんだけど ⋯⋯

— ナニ？

— 階数，って誰が計算しても同じになる？

— 標準形にできればいいんだから，誰が計算しても同じ標準形になるでしょう？

— いや，たとえばだけど，計算を楽しようと思って，最初に行の交換とか列の交換してもいいんだよね.（交換は都合に応じていつ行ってもよかった.）

— ま，ね.

— そしたら，計算が変わってきてしまって，標準形の形が同じかどうか保障があるの？

— なるでしょう？だって，連立方程式の答えは 1 通りだよねぇ？

— 難しい問題だな．やってみないとわからない ⋯⋯ けどならないような気もするなぁ. 先生に聞いてくるね.

（後日）

— 聞いてきた．いってたとおりで，列の交換をしてしまうと標準形は一通りじゃないんだって.

— どういうこと？

— つまり，x,y,z と 3 文字あったとして，1 文字残るとして，x,y について解くときと，x,z について解くときと，その標準形は変わってきてしまうってさ.

— ありゃま．じゃあ，標準形はいろいろあると．
— で，階数は誰が計算しても同じなの？
— それは同じになるって先生は言ってた．
— 数学の定理の力で？てこと？
— うん．証明は難しいから授業ではやらないって．
— やっぱり数学は便利だな．

サク単！公式 2.8 (解の次元と階数)　文字変数が n 個あるような連立方程式 (係数行列を A とする) が不定解を持つ場合，

$$(\text{解の次元}) + \mathrm{rank}A = n$$

が成り立つ．

— これが先生の言ってた「解の次元を保障する」公式だね．
— 標準形ってさ，$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right)$ こんなんでしょう？
— 左上の 0 と 1 が並んでいるところは正方形なわけだよ．
— ふんふん．あ，そうか，だから，左上部分の 1 の個数がランクだといってもいいわけだ．
— 解の次元はパラメーターの個数だったでしょう？パラメーターは右側の $*$ のところに相当するわけで，つまり，上の公式は
(挿絵)
という足し算というわけだ．
— パラメータが残らない，という場合は,「階数 = 文字変数の個数」って理解していいのかな．
— 自由度が 0 だと思えば，そういうことだよね．
— おおお，なんとなく納得した．
— 「なんとなく」は「納得」とは言わないぞ．

サク単！公式 2.9 (標準形との関係式) 行列 A に対して連立方程式の標準形をもとめてそれを B とすると，ある正則行列 P, Q が存在して，$B = PAQ$ と表せます.

標準例題 2.17 問題 2.6 で取り上げた $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ という行列は次の手順で連立方程式の標準形へと変形することができます．それぞれの基本変形に対応する基本行列も併記しておきましょう.

(手順)

(a) 1 行目の 2 倍を 2 行目に加える，($R\,(2,1;2)$)
(b) 1 行目の 1 倍を 3 行目に加える，($R\,(3,1;1)$)
(c) 2 列目と 3 列目の交換，($P(2,3)$)
(d) 2 行目の -3 倍を 1 行目に加える，($R\,(1,2;-3)$)
(e) 2 行目の -1 倍を 3 行目に加える，($R\,(3,2;-1)$)

(a) から (e) は基本変形です．公式 2.10 により「行の基本変形は基本行列を左からかける」「列の基本変形は基本行列を右からかける」ということに対応していますので，行列 A に変形 (a) を行うと，その結果は

$$R\,(2,1;2)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となります．変形 (a)〜(e) を順番に行うわけですから，これらの基本変形をこの順にすべておこなうと（(c) だけは右からかけますが）

$$\begin{aligned} & R\,(3,2;-1)\,R\,(1,2;-3)\,R\,(3,1;1)\,R\,(2,1;2)\,AP(2,3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となります．いま，

$P = R(3,2;-1)\,R(1,2;-3)\,R(3,1;1)\,R(2,1;2)\,, Q = P(2,3)$

と置くと，この式は単に PAQ と書くことができます．一方で，この計算式は A から初めて (a)〜(e) の基本変形をしたものに他ならないですので，その標準形を B とおけば，$B = PAQ$．という式が求まります．基本行列は正則（公式 2.5）ですから，その積である P も正則になります.（公式 1.44）

標準演習 2.5 実際には $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ です．上の行列の計算からまず P, Q を求め，$B = PAQ$ が成り立っているかどうか確かめてみましょう．

— 基本変形によって標準形が得られる，ということを基本行列との積に置き換えられる，というわけだね.

— 行に関する基本変形は左からのかけ算っていうことは，列の掃きだしはみんな左からのかけ算だったりする？

— する！する！

— ねえ，$B = PAQ$って書けるんだから，別に Q を先に右からかけてもいいんでしょう？

— 大丈夫だろうね.

— じゃあ，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の標準形を求めるときに一番最初に 2 列目と 3 列目を交換してから始めてもいいわけだ.

— いいとおもうけど，一番最初に 2 列目と 3 列目を交換する動機というか理由がないじゃない.

— う〜〜後で必要だとなんとなくわかっていたから？っていうのはダメ？

— ……….

標準問題 2.8 次の行列の階数を求めよ．x の値による場合わけをおこなう．$\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 1 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$

解答: x の値がわからないので,「x の関する式で割る」ことをしないように注意する.

(a) 1 行目と 2 行目を交換 (b) 1 行目の $(-x+1)$ 倍を 2 行目に加える (c) 2 行目と 3 行目を交換 (d) 2 行目を -1 倍 (e) 2 列目を掃きだし

$$\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 1 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} (a) \to \begin{pmatrix} 1 & x-1 & -2 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \to \begin{pmatrix} 1 & x-1 & -2 \\ 0 & -x^2+2x+1 & 2x-2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} (c) \to \begin{pmatrix} 1 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \\ 0 & -x^2+2x+1 & 2x-2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \to \begin{pmatrix} 1 & x-1 & -2 \\ 0 & 1 & -x+1 \\ 0 & -x^2+2x+1 & 2x-2 \end{pmatrix} (e) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2-2x-1 \\ 0 & 1 & -x+1 \\ 0 & 0 & -(x-1)(x-3)(x+1) \end{pmatrix}$$

以上より，$x = 1, 3, -1$ の時には階数は 2．それ以外の場合には階数は 3. $\boxed{{}^{|}\forall{}^{|}}$

— 階数は連立方程式の標準形を求めて,「0 でない行」を数えればいい！
— もう呪文みたいだね.
— 呪文を唱えれば答えが出ればいいのに.
— 右下のはどうやって出たの？
— 最後のところで 2 行目の x^2-2x-1 倍を 3 行目に加えるから，右下の成分は $2x-2+(x^2-2x-1)(-x+1) = -x^3+3x^2+x-3$
— ぎゃ〜〜！ 因数分解できないといけないのか〜〜〜
— コンピュータを使えば，呪文だけで答えが出るんじゃないの？
— こんな風に x とか文字が入ってても答えを出してくれるかなぁ.
— 理屈を理解してがんばって手で計算したほうが早いような ····

発展問題 2.9 n 次正方行列 A について $\mathrm{rank}A = n \iff A$ は正則

解答: （⇒ の証明）$\mathrm{rank}A = n$ と仮定すると，A から基本変形によって得られる標準形には 1 が n 個並ぶことになる．これはすなわち単位行列 I である．基本変形は（行の基本変形であれば左から，列の基本変形であれば右から）基本行列をかけることと同等だった．(公式 2.3，問題 2.3）基本行列はどれも正則だった（公式 2.2）から，すなわち，ある正則行列 P, Q があって， $PAQ = I$ と表せる．（ここで P, Q は基本行列をいくつかかけたものである.）この式を変形して

$PAQ = I \to P^{-1}PAQ = P^{-1}I \to AQ = P^{-1}$

$\to AQQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1} \to A = P^{-1}Q^{-1} = (QP)^{-1}$

となり，A が正則行列（逆行列を持つ行列）であることが示された．

（⇐ の証明）A が正則であるとして，$\mathrm{rank}A = n$ を示そう．$\mathrm{rank}A$ は行の数（すなわちここでは n）以下であることから,「$\mathrm{rank}A < n$ にならない」ことが示せれば十分である．もし $\mathrm{rank}A < n$ だったと仮定すると（背理法の仮定），標準形の一番下の行は 0 になる．いま，標準形は PAQ という形であらわされ，P, A, Q のどれもが正則行列なので PAQ も正則行列である．しかし，一番下の行が 0 であるような行列は正則ではない（公式 1.15）なので矛盾．従って「$\mathrm{rank}A < n$ にならない」ことが示せて $\mathrm{rank}A = n$ である．

— こういう証明，ってできるようになったほうがいいの？

— 先生に聞いてきた．証明を暗記しても仕方ないって．でも，n 次正方行列が正則だという感覚と，階数が n，つまり標準形が単位行列だという感覚が，どこかでつながっていたほうがいいって．

— 感覚ねえ〜〜〜「ここで P, Q は基本行列をいくつかかけたものである.」ってどういう意味？

— 例題 2.9 でやったように，つまり，基本行列を右や左からいくつかかけて，標準形が得られるということ．

— そっか．うん．

— 「もし $\mathrm{rank}A < n$ だったと仮定すると，標準形の一番下の行は 0」はなぜ？

— つまり，左上から 1 が $n-1$ 個しか並ばないような標準形の一番下の行は，形からして全部 0 になってしまう，ということだと思うよ．

2.5 逆行列のガウス・ジョルダンの方法

＜予習＞

- 掃きだし法を思い出そう
- 逆行列の定義を思い出そう

— 掃きだし法, って音が悪いよね.
— それ以上言うな.

この講義では，ガウス・ジョルダンの方法といって，列の掃きだしのみを用いて逆行列を筆算で求める方法を解説します.

サク単！定義 2.9 (ガウス・ジョルダンの方法) (1) 行列 A と単位行列 I とを横に並べて横長の行列を作ります.（A が 3 次の行列だったら，3 行 6 列の行列になります.）
(2) $(1,1)$ 成分が 0 でなければ，$(1,1)$ 成分で列の掃きだしをします.（もし万が一 $(1,1)$ 成分が 0 のときには，こっそり下の行と交換をしておきます.）
(3) $(2,2)$ 成分が 0 でなければ，$(2,2)$ 成分で列の掃きだしをします.（もし万が一 $(1,1)$ 成分が 0 のときには，こっそり下の行と交換をしておきます.）
(4) $(3,3)$ 成分 $\cdots$ と同じようにつづけて，左半分が単位行列になるまで作業をします．そのとき，右半分には逆行列 A^{-1} が現れます.

基本例題 2.18 例として正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみましょう．掃きだし法は十分にマスターしているものとして，計算結果だけを書きますので，みなさん検算してみてください.

(1) 行列 A と単位行列 I とを横に並べて 3 行 6 列の行列を作ります.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $(1,1)$ 成分が 0 でないので，$(1,1)$ 成分で列の掃きだしをします． 1 行目を 4 で割って

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 行目の 1 倍を 2 行目に加えます．1 行目の -1 倍を 3 行目に加えます．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 13/4 & -7/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & -5/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(2,2)$ 成分が 0 でないので，$(2,2)$ で列の掃きだしをします．2 行目を $\frac{4}{13}$ 倍して

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/13 & 1/13 & 4/13 & 0 \\ 0 & -5/4 & 3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行目の $-\frac{1}{4}$ 倍を 1 行目に加え，2 行目の $\frac{5}{4}$ 倍を 3 列目に加えます．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/13 & 3/13 & -1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -7/13 & 1/13 & 4/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1/13 & -2/13 & 5/13 & 1 \end{pmatrix}$$

$(3,3)$ で列の掃きだしをします．3 行目を 13 倍して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/13 & 3/13 & -1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -7/13 & 1/13 & 4/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

3 行目の $-\frac{5}{13}$ 倍を 1 行目に加え，3 行目の $\frac{7}{13}$ 倍を 2 列目に加えます．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

左半分が単位行列になりました．したがって，$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ が逆行列 A^{-1} です．

— やりかたは実際に練習してみればよさそうだけど,「こっそり行の交換を行う」って，こっそりやる必要はあるの？

— 気持ちの持ちようじゃない？きっと.

参考 2.4 なぜこの方法で逆行列が求まっているかを解説しましょう．問題 2.9 により，n 次の正則行列 A は階数が n です．このことより，標準形は単位行列であることが分かります.（このことも問題 2.9 で確認済みです.）したがって，行の基本変形だけで（列の交換を用いることなく）標準形を得ることができますので，ある正則行列 P（＝行の基本変形の手順に応じて決まる基本行列の積）が存在して，$PA = I$ となっていることが分かります．$PA = I$ より，P は A の逆行列であることが分かります．すなわち $P = A^{-1}$ です．いま，$(A\ I)$ という横長の行列を考えました．そして，行による基本変形で左半分を単位行列へと変形しました．このことは行列 $(A\ I)$ の左から行列 P をかけることと同じことです.（P は基本変形の手順に応じて決まる基本行列の積ですから.）

$$P(A\ I) = (PA\ PI) = (I\ P) = (I\ A^{-1})$$

ですから，左半分が I になっていることと，右半分が A^{-1} になっていることとは同等なのです.

— なんだか，カッコよすぎない？この説明.

— 実際に計算して求めるドロ臭さとは雲泥の差だな．スマートすぎるというか.

— 雲の上の解説だな．まさに.

標準例題 2.19 ガウス・ジョルダンの方法では，与えられた行列が正則行列（＝逆行列が存在するような行列）かどうかがわからなくても，作業を始めることができます．ただし，正則でない場合には，途中で作業を続行できくなることから，正則でないことが判明します．次の例は正則でない例です.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とします．まずは $(A\ I)$ を作ります.

$$(A\ I) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 行目の 3 倍を 2 行目へ，1 行目の (-1) 倍を 3 行目へ加えます.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3+3\cdot 1 & -5+3\cdot 4 & -2+3\cdot 3 & 0+3\cdot 1 & 1 & 0 \\ 1-1\cdot 1 & 2-1\cdot 4 & 1-1\cdot 3 & 0-1\cdot 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行目を $\frac{1}{7}$ 倍，2 行目の 2 倍を 3 行目へ加えます．

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & -2+2\cdot 1 & -2+2\cdot 1 & 1+2\cdot\frac{3}{7} & 0+2\cdot\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

ここまで計算すると，3 行目の左半分がすべて 0 になってしまいましたので，これ以上作業を続けても左半分を単位行列にすることができないことがわかります．このことから行列 A には**逆行列がない**ことがわかります．

別の言い方をしましょう．もとの行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を基本変形した結果，一番下の行がすべて 0 になってしまったということから，行列 A の階数 $\mathrm{rank}A = 2$ だということがわかります．そこで問題 2.9 に照らし合わせてみれば，行列 A は正則ではないことがわかります．

— へえ，なんか惜しいな．

— 右半分はまだ残っているのにね．というかそういう問題ではないと $\cdots$

— 階数が 3 より小さいというところが問題なんだな，きっと．

— ああ，それで，3 次の行列だから正則だったら階数は 3，という話とつながるわけかぁ．

基礎問題 2.10 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ

解答: ガウス・ジョルダンの方法に従って逆行列を求める.

$$(A\ I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（分数式を出したくないので）1 行目と 2 行目を交換する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 行目の -2 倍を 2 行目に，1 行目の -1 倍を 3 行目に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2-2 & 3-16 & 1-6 & 1 & 0-2 & 0 \\ 1-1 & 3-8 & 1-3 & 0 & 0-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

（結局分数式は避けられないようなので）2 行目を -13 で割り，2 行目の (-8) 倍を 1 行目に加え，2 行目の 5 倍を 3 行目に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8-8 & 3-40/13 & 0+8/13 & 1-16/13 & 0 \\ 0 & 1 & 5/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & -5+5 & -2+25/13 & 0-5/13 & -1+10/13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/13 & 8/13 & -3/13 & 0 \\ 0 & 1 & 5/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & -1/13 & -5/13 & -3/13 & 1 \end{pmatrix}$$

3 行目を -13 倍し，3 行目の 1/13 倍を 1 行目に加え，3 行目の $-5/13$ 倍を 2 行目に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/13+1/13 & 8/13+5/13 & -3/13+3/13 & 0-1 \\ 0 & 1 & 5/13-5/13 & -1/13-25/13 & 2/13-15/13 & 0+5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

従って逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -13 \end{pmatrix}$

$\boxed{|_{\forall}|}$

— （みんなで黙々検算中 …… ）なった？

— （黙々々々々々々々々々々々々々々）ならない．あ，間違えてた …

— （黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙黙）あわない〜〜〜〜

— 合うまで計算しよう．

標準問題 2.11　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ

解答:　$(A\ I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 行目の 2 倍を 2 行目へ加え，1 行目の -1 倍を 3 行目へ加える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行目の 1 倍を 4 行目に加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 行目の -1 倍を 1，2，4 行目に加える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 行目の -2 倍を 1 行目へ，4 行目の 1 倍を 2 行目へ加える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

以上より逆行列は $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

— （みんなで黙々検算中）
— 係数とか手加減してくれてるのはイタイほどよくわかるんだけど ⋯⋯
— ゼッタイ計算合わないって，これ．
— これ試験でたらどうしよう ⋯⋯
— 「どうしよう」って出るんでしょう？こういうの．
— あ〜〜〜〜もう！いつまでかかるんだろう．永遠に解けない！
— ⋯⋯⋯ あ，やった！できたもんね！合った合った〜〜〜 !!
— え〜〜いいなぁ．合うまで粘ろう，とにかく．

2.6 余因子行列・逆転公式

＜予習＞

- 逆行列の定義を思い出そう

— おお，ここが予告されていた「逆行列の公式」の回かな.
— 期待できるね.

2 次の正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ でした（公式 1.4）. この公式に類する 3 次以上の公式があって，逆転公式と呼ばれています．逆転公式は余因子行列を用いて表されます．ただし，4 次以上の行列について実際に逆転公式で逆行列を求めるのは実際的ではなく，理論的な問題の解決に有効であることを断っておきます.

サク単！定義 2.10 (余因子) 正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)}$ の (i,j) 余因子 $\tilde{a}_{ij}$ とは，行列 A から「i 行と j 列を取り除いた」行列の**行列式**に $(-1)^{i+j}$ 倍したもののことであるとします.

基本例題 2.20 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とすると，$(1,2)$ 余因子 $\tilde{a}_{12}$ は「1 行と 2 列を取り除いた」行列 $\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ の「行列式の $(-1)^{1+2}$ 倍」$(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = \tilde{a}_{12}$

— この a の上の「チョロン」は何て読むの？
— 先生は「チョロン」って呼んでたよ.
— 正しくは「チルダ」らしいけど.

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の $(2,3)$ 余因子はどうやって求めるの？

— えっと，2 行目と 3 列目をまず 2 重線で消して $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{pmatrix}$ でしょう？で，

$(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = 6$？かな？合ってる？

— $\tilde{a}_{23} = 6$って言っていいね．

— そのさ，$(-1)^5$ の 5っていうのはどこから来たの？

— $2 + 3$

— その $2 + 3$ ていうのはどこから来たの？

— だからァ$(2,3)$ 余因子でしょう？で $2 + 3$.

— ああ，それで $(-1)^{i+j}$ 倍って書いてあるのか.

— 行列 A だったら，余因子は $\tilde{a}_{23}$ とか書いていいわけ？

— ??　たぶんそう.

— じゃあ，行列 B なら $\tilde{b}_{23}$ かな？

— きちんとしたルールはなさそうだけど，そうなんじゃないかな.

サク単！定義 2.11 (**余因子行列**)　行列 A に対して，余因子 $\tilde{a}_{ji}$ を (i,j) 成分に並べた行列を**余因子行列**といいます．大切なことなのでもう一度いいます．余因子行列の (i,j) 成分は $\tilde{a}_{ji}$ です．$\tilde{a}_{ij}$ ではありません．行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ と書きます.

基本例題 2.21　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，$\tilde{a}_{11} = d, \tilde{a}_{12} = -c, \tilde{a}_{21} = -b, \tilde{a}_{22} = a$ ですので，

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ です.（$\tilde{a}_{21}$ と $\tilde{a}_{12}$ の位置に注意！）

$B=\begin{pmatrix}4&1&1\\-1&3&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ とすると，$\tilde{b}_{11}=\begin{vmatrix}3&-2\\-1&1\end{vmatrix}=1, \tilde{b}_{12}=-\begin{vmatrix}-1&-2\\1&1\end{vmatrix}=-1, \tilde{b}_{13}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&-1\end{vmatrix}=-2, \tilde{b}_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2, \tilde{b}_{22}=\begin{vmatrix}4&1\\1&1\end{vmatrix}=3, \tilde{b}_{23}=-\begin{vmatrix}4&1\\1&-1\end{vmatrix}=5, \tilde{b}_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}=-5, \tilde{b}_{32}=-\begin{vmatrix}4&1\\-1&-2\end{vmatrix}=7, \tilde{b}_{33}=\begin{vmatrix}4&1\\-1&3\end{vmatrix}=13$，となり，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\-1&3&7\\-2&5&13\end{pmatrix}$ です.

基本演習 2.6　この例を検算してください.

— 行と列を入れ替えるんだな．$\tilde{b}_{12}=-1$ は $(2,1)$ 成分だね.
— 訳は後でわかると先生には言われたけれど $\cdots$
— 言われたとおりにするしかないな.
— ああ !!
— どうした？
— この $\tilde{B}$って，前の授業でガウス・ジョルダンの方法で計算した逆行列とぴったり一致してるよ.
— ほう．何か理由がある，ということだな．まあ，逆行列の公式を出すよ，と言ってはじめた授業だからねえ.
— でも 2×2 のほうはぴったり逆行列じゃないよ．大体は逆行列だけど，$\frac{1}{ad-bc}$ の部分がないよ.
— そういえばそうだ $\cdots$.

サク単！定義 2.12 (逆転公式)　正則行列 A の逆行列は $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ で与えられます.

基本例題 2.22　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とすると，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ なので，

$$\frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となり，これは 2 次正方行列の逆行列の公式です．

$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $|B| = 4\cdot3\cdot1 + 1\cdot(-2)\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 4\cdot(-2)\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\cdot1 - 1\cdot3\cdot1 = 1$ ですから，

$\frac{1}{|B|}\tilde{B} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ となり，前の授業で求めた逆行列の計算結果と一致しています．

— 逆転公式だって．
— はぁ，なるほど．3 次行列だったら，この方が簡単かもね．
— 計算間違いの心配が少なくて済むと思うよ．ガウス・ジョルダンのほうだと，最初の計算で間違うと，それ以降の計算が全部アウトだからねぇ．
— 先生は「4 次だと実際的でない」と言っていたけどどうしてだろう？
— 行列式 $|A|$ は展開公式でいけるから，まぁちょっとはいやだけどそれほどではない．
— イヤなのは余因子行列 $\tilde{A}$ のほうか．
— $4 \times 4 = 16$ 回，サラスの計算をするわけか．ちょっとやりたくないな．
— そういえば，大発見したぞ．
— え〜！なになに？
— $|A| \neq 0$ だったらいつでも $\frac{1}{|A|}\tilde{A}$ は計算できるでしょう？
— えーと，まあそうだね．余因子行列はいつでも作れるからね．
— ということは「$|A| \neq 0$ **だったら逆行列はある**」んだなあって．
— あれ，ホントだ．へえ．そういうもんなんだね．すごいすごい．

参考 2.5 ここから先は理論の話です．逆転公式はなぜ成り立つのでしょうか．そのことを確認しておくことは，次のクレメルの公式の証明へのヒントになり，大切なことです．

3 次の正方行列の場合で展開公式をもう一度考えて見ます．$A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix}$

とおくと，サラスの公式は

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} &= x(cf-de) - y(af-be) + z(ad-bc) \\ &= x\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\tilde{a}_{11} + y\tilde{a}_{21} + z\tilde{a}_{31}\end{aligned}$$

と余因子を使って書き表すことができます．ここまでわかった式を書いてみます．

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

標準演習 2.7　上の式を検算してください．

— えーと，$\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}$ は $cf-de$ の意味だよねぇ．どうしてこれが $\tilde{a}_{11}$ に化けるのかな !?

— $\begin{pmatrix} \cancel{x} & \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{y} & c & d \\ \cancel{z} & e & f \end{pmatrix}$ っていう感じ？

— おお，そういう風につながってるのか．

ここで x, y, z のかわりに 2 列目の a, c, e を当てはめるとどうでしょうか？つまり，

$$a\tilde{a}_{11} + c\tilde{a}_{21} + e\tilde{a}_{31}$$

の値を計算してみましょう．もちろん $\tilde{a}_{11} = cf - de$ など元の式を代入すれば計算することはできます．しかし今はそれ以外の方法でこの式を計算することを考えましょう．ヒントは「x, y, z のかわりに a, c, e を当てはめる」という点です．もともと $x\tilde{a}_{11} + y\tilde{a}_{21} + z\tilde{a}_{31}$ はサラスの公式から導かれた式でした．この式の x, y, z のかわりに a, c, e を当てはめたのですから，よく考えると，

$$a\tilde{a}_{11} + c\tilde{a}_{21} + e\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} a & a & b \\ c & c & d \\ e & e & f \end{vmatrix}$$

でなければいけません．この式の右辺を改めてよくみますと第 1 列と第 2 列が同じですね．このような行列の行列式は基本公式 (4) により 0 です．すなわち

$$a\tilde{a}_{11}+c\tilde{a}_{21}+e\tilde{a}_{31}=\begin{vmatrix} a & a & b \\ c & c & d \\ e & e & f \end{vmatrix}=0$$

と求まりました．

— 確認だけど，$\begin{vmatrix} a & a & b \\ c & c & d \\ e & e & f \end{vmatrix}$ を展開して $a\tilde{a}_{11}+c\tilde{a}_{21}+e\tilde{a}_{31}=0$，という考え方はいいのかな?

— う〜〜〜たぶんよさそう，というか，同じことじゃない？

全く同じように考えて，x, y, z のかわりに b, d, f を当てはめることにより，

$$b\tilde{a}_{11}+d\tilde{a}_{21}+f\tilde{a}_{31}=0$$

も示されます．

標準演習 2.8　$b\tilde{a}_{11}+d\tilde{a}_{21}+f\tilde{a}_{31}=0$ の成り立つ理由を説明してみましょう．

ここまでわかった式を次の計算の左辺に代入してみましょう．

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

次の計算をする為には，サラスの公式を別の形に変形することが必要です．

$$|A|=\begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix}=-a(yf-dz)+c(xf-bz)-e(xd-by)$$

$$=-a\begin{vmatrix} y & d \\ z & f \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} x & b \\ z & f \end{vmatrix}-e\begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}=a\tilde{a}_{12}+c\tilde{a}_{22}+e\tilde{a}_{32}$$

標準演習 2.9　上の式が正しいことを検算しましょう．

このことがわかると

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ * & |A| & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

までわかります.

今度はサラスの公式の a, c, e のところに x, y, z を当てはめることを考えると

$x\tilde{a}_{12} + y\tilde{a}_{22} + z\tilde{a}_{32} = \begin{vmatrix} x & x & b \\ y & y & d \\ z & z & f \end{vmatrix} = 0$ がわかります.（前と同じ理屈ですので, 結果だけを書きましたが，この式が成り立つ理由はきちんと確認してください.

標準演習 2.10　改めて言いますがキチンと確認してください.

このことがわかると $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

までわかります．このように一つ一つ式を導くことにより,

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ a_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|I$$

を導くことができます．この式の左辺にわかっている式を当てはめると

$\tilde{A}A = |A|I$

です．この右側から A^{-1} をかけて，両辺を $|A|$ で割ると,

$\frac{1}{|A|}\tilde{A}AA^{-1} = \frac{|A|}{|A|}IA^{-1} = A^{-1}$

$\frac{1}{|A|}\tilde{A} = A^{-1}$

を得ます．これで逆転公式が正しいことがわかりました.

3 次の行列について逆転公式が正しいことを説明しましたが，この説明で大切なことは，行列式の展開公式を元にして，あとは「同じ列があるような行列の行列式は 0」という基本性質だけをつかって示されているということです．行列式の展開公式や行列式の基本性質は 4 次以上の行列についても正しい事柄ですので, 逆転公式も 4 次以上の行列で正しいことになります.

— おぉ，すごい．なんだかわかったような気がする.

— キチンと理屈を追えたわけではないけど，ちょっと気になる．

— 何が？

— $|A|=\begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} y & d \\ z & f \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} x & b \\ z & f \end{vmatrix}-e\begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}$

$=a\tilde{a}_{12}+c\tilde{a}_{22}+e\tilde{a}_{32}$ て言ってたけど，この式に相当する 4 次の行列式の公式，って習っていない気がする．

— え〜，よく気がつくなぁ．そうだった？

— うん，調べなおして先生に聞いてくる．

（後日）

— 聞いてきた．やっぱり習ってない．けど，2 列目に関する展開公式，といって，やっぱり成り立つんだって．

— そういう公式があるんだね．

— 一応正しい理由も教わってきた．2 列目と 1 列目を交換すると行列式は -1 倍になるけど，2 列目と 1 列目を交換してから（1 列目の）展開公式をつかうと，ちょうど -1 倍の公式がでてきて，それでつじつまが合うんだって．

— なんだって？その説明で君はわかった？

— う〜ん．そう言われると自信ないけど，なんとなくわかった．

基礎問題 2.12 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を逆転公式により求めよ

解答: $\tilde{a}_{11}=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1, \tilde{a}_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2, \tilde{a}_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-5, \tilde{a}_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0, \tilde{a}_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1, \tilde{a}_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3, \tilde{a}_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}=1, \tilde{a}_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-5, \tilde{a}_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=13$, より $\tilde{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -5 & -3 & 13 \end{pmatrix}$ である．また，A の行列式はサラスの公式により $|A|=-1$ である．以上より逆転公式により

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -5 & -3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

|∀|

— 3 次のときはやっぱりこっちのほうが楽だな.

— うん．スンナリ求まった気がする.

2.7　クラメルの公式

＜予習＞

- 展開公式を思い出そう
- 逆転公式を思い出そう

— いっぱい公式覚えた〜〜〜もうメモリ容量オーバーかも．

— あと公式 1 つで期末試験だ！がんばれ．オレもがんばる．

— 展開公式は ⋯⋯?

— $\begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ かな．

— おう，よく覚えてるね．逆転公式は？

— $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdots$ あとなんだっけ．

— $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ かな．余因子行列 $\tilde{A}$ だね．

発展 2.6　連立方程式に一意解がある場合には，逆転公式を応用してクラメルの公式を導くことができます．まずは 2 元（文字変数が 2 つの場合）で考えてみます．

方程式を $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ とすると，この式は行列の積の形で書くことができて，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とかけます．

— ここまでは ⋯⋯ いいかな．

— 一応確認だけど，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ で $ax + by = p$ だよね．

— うん．

ここで $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいて，その逆行列 A^{-1} を両辺にかけます．

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

ここで，$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を代入すれば，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dp-bq \\ -cp+aq \end{pmatrix}$$

従って，$x = \dfrac{dp-bq}{ad-bc}$，$y = \dfrac{-cp+aq}{ad-bc}$ が得られました．これを行列式の形で表現してみると，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

となります．この式が 2 元連立方程式のクラメルの公式なのですが，この式の中の p, q の位置に注目してみると，こうなります．

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{p} & b \\ \boxed{q} & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & \boxed{p} \\ c & \boxed{q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

この式を次のようにみなすことができます．

まず第 1 に**分母には左辺の係数の並び** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **の行列式**が現れます．

第 2 に**分子には左辺の係数の並びのうち，1 つの列を** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ **に置き換えた行列式**が現れます．

このことが分かっていると，2 元連立方程式は容易に解くことができます．

基本例題 2.23 $\begin{cases} 3x-2y=2t+1 \\ 5x-3y=-3t+1 \end{cases}$ を x, y について解いてみましょう．

分母は共通で $\begin{cases} 3\,x\,-2\,y = 2t+1 \\ 5\,x\,-3\,y = -3t+1 \end{cases}$ の部分に着目して

分母 $= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5 = 1$ とまずわかります.

x についての分母は，x の係数を定数項に置き換えたようなものですから，

$\begin{cases} 3x\,-2\,y = \,2t+1 \\ 5x\,-3\,y = \,-3t+1 \end{cases}$ 着目して

x の分子 $= \begin{vmatrix} 2t+1 & -2 \\ -3t+1 & -3 \end{vmatrix} = (2t+1)\cdot(-3)-(-3t+1)\cdot(-2) = -12t-1$

です.

y についての分母は，y の係数を定数項に置き換えたようなものですから，

$\begin{cases} 3\,x-2y = \,2t+1 \\ 5\,x-3y = \,-3t+1 \end{cases}$ に着目して

y の分子 $= \begin{vmatrix} 3 & 2t+1 \\ 5 & -3t+1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3t+1)-5\cdot(2t+1) = -19t-2$ です.

以上より $x=-12t-1, y=-19t-2$ なのですが，この方法のよいところは 2 元連立方程式をほとんど余分な計算なしに解けることで，もし筆算であったとしても，途中式なしにいきなり $x=\cdots$ と書き始めることができます.（分母に当たるところは暗算しておくのがコツなのです.）

— おお，これは便利な気がする.
— 計算量が減っているのがいいね．計算ミスを減らすことができるね.
— なにより，2 元連立方程式を目の前にして，予備計算なしにいきなり $x=\cdots$ って書き始めたらカッコイイ.
— 上の例の問題だったら，まず $3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=1$ を暗算しておく．分母は 1 だと覚えておく．そしてやおら，
$x=(2t+1)\cdot(-3)-(-3t+1)\cdot(-2)=-12t-1$
って書いていいわけか．確かにカッコイイな．やってみたいな.

サク単！公式 2.10（**３＊３のクラメルの公式その１**）

$$\begin{cases} ax+by+cz &= p \\ dx+ey+fz &= q \\ gx+hy+jz &= r \end{cases}$$ が一意解をもつならば， $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \colorbox{lightgray}{p} & b & c \\ \colorbox{lightgray}{q} & e & f \\ \colorbox{lightgray}{r} & h & j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}}$ です.

基本例題 2.24 $\begin{cases} -x+y+2z &= 5 \\ 3x+2y-z &= 5 \\ -2x-y+3z &= 4 \end{cases}$ の解のうち x は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \colorbox{lightgray}{5} & 1 & 2 \\ \colorbox{lightgray}{5} & 2 & -1 \\ \colorbox{lightgray}{4} & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30-4-10-5-15-16}{-6+2-6+1-9+8} = \frac{-20}{-10} = 2$$

— ええええええーーーー！

— これだけですか ····

— なんという.

参考 2.7 この式は，式のカッコよさもさることながら，この式が成り立つ理由がなによりカッコイイので，どうしても紹介したいのです.

— 教員，妙に力がはいってるな.

— せっかくだから聞いてあげよう ····

係数行列を $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ とします．そうすると，連立方程式は

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$ と表せます．

この形が一意解をもつということは，連立方程式の標準形にしたときに単位行列 I が現れることなので，したがって，A には逆行列が存在するのですが，必ずしもそのことは納得できなくてもかまいません．逆行列 A^{-1} が存在するものとして，両辺左からかけてみましょう．

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

ここで逆転公式を使います．

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

ここで，x に当たるところだけ計算してみます．

$$x = \frac{1}{|A|}(p\tilde{a}_{11} + q\tilde{a}_{21} + r\tilde{a}_{31}) \qquad (\star)$$

ここで，$|A|$ の展開公式を改めて思い出します．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & j \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a\tilde{a}_{11} + d\tilde{a}_{21} + g\tilde{a}_{31}$$

この式と上の式 $(\star)$ とを比べてみると，a, d, g のところに p, q, r を入れたような式になっているではないですか！バキッ（チョークの折れる音）

— いよいよリキが入ってきた ……

— クライマックスなんだろう．

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}$ の「a, d, g のところに p, q, r を入れた式」を式 $(\star)$ に代入すると,

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & j \end{vmatrix} \text{ ですっ!!}$$

— いきなり終わった …

— 急転直下だな.

— （ぱちぱちぱちぱちぱち …… ）

サク単！公式 2.11（**3＊3のクラメルの公式（つづき）**）

$$\begin{cases} ax + by + cz &= p \\ dx + ey + fz &= q \\ gx + hy + jz &= r \end{cases}$$ が一意解をもつならば,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}},\ z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}} \text{ です.}$$

基本例題 2.25　上の方程式では同じように, $y = \frac{-10}{-10} = 1$, $z = \frac{-30}{-10} = 3$ を求めることができます.

基本演習 2.11　x, y, z の値を検算してみてください.

— すごい迫力だった.

— 公式の迫力というより教員の迫力だったな ….

— これって, 不定解だとどうなるの？

— 分母が 0 になる？かな.「係数行列の階数が 2 になる」とかいう理由で.

— ああ, またそれか. ちゃんと言うと,「係数行列 A の階数が 2 以下になる」ので,

「係数行列 A は正則ではない」ので,「A の行列式は 0 になる」ということかな.

— おお，きれいにつながっているね.

— ４元連立でも同じような公式があるんだろうね.

— あったとしても，4 次の行列式を求める気が起きないけどね.

— そっか，そっちの問題もあるか ……

基礎問題 2.13　方程式 $\begin{cases} 2x-4y+5z &= 5 \\ x+3y-2z &= -10 \\ 3x+2y+4z &= 6 \end{cases}$ をクラメルの公式で解け.

解答:　共通の分母は $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 24+24+10+8+16-45 = 37$ であるので,

$$x = \frac{1}{37}\begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -10 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{60+48-100+20-160-90}{37} = -6$$

$$y = \frac{1}{37}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -10 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-80-30+30+24-20+150}{37} = 2$$

$$z = \frac{1}{37}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -10 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{36+120+10+40+24-45}{37} = 5$$

$\boxed{|_{\forall}|}$

— すぱっ，という感じだな.

— 切れ味するどいね.

標準問題 2.14 x, y に関する方程式 $\begin{cases} (t-1)x+ty &= s \\ tx+(t+1)y &= 1 \end{cases}$ をクラメルの公式で解け.

解答:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & t \\ 1 & t+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t-1 & t \\ t & t+1 \end{vmatrix}} = \frac{s(t+1)-t}{(t-1)(t+1)-t^2} = -st-s+t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} t-1 & s \\ t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t-1 & t \\ t & t+1 \end{vmatrix}} = \frac{(t-1)-st}{(t-1)(t+1)-t^2} = st-t+1$$

|∀|

— ………

— ………

— おい，だれか何か言えよ.

前期期末試験

＜予習＞

- 2-1:行の基本変形
- 2-2:掃きだし法
- 2-3:連立方程式の解法
- 2-4:階数
- 2-5:逆行列のガウス・ジョルダンの方法
- 2-6:余因子行列，逆転公式
- 2-7:クラメルの公式

前期期末試験

[2-1]

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ に行の基本変形を行って，$(2,1)$ 成分と $(3,1)$ 成分が 0 であるようにせよ．

[2-2]

(1) $\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$ （$a \neq 0$）について，$(1,1)$ に関する列の掃きだしを行え．

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -4 \\ 9 & 0 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ を連立方程式の基本形に変形せよ．

[2-3]

(1) 次の方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x & +2y & -3z & -w & = 7 \\ 3x & -2y & +z & -w & = 7 \\ 7x & +2y & -5z & -3w & = 19 \end{cases}$$

(2) 次の方程式が解をもつように定数 a, b, c を求めよ.

$$\begin{cases} 2x & +5y & -z & -2w & =4 \\ x & +3y & +3z & +w & =1 \\ 2x & -3y & +az & +bw & =c \end{cases}$$

[2-4] 階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x-3 & 0 & 4 \\ -4 & x+1 & 4 \\ -2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$

[2-5]

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列をガウス・ジョルダンの方法で求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための a の条件と，そのときの逆行列を求めよ.

[2-6]

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を逆転公式で求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列の $(2,1)$ 成分のみを求めよ.

[2-7]

$$\begin{cases} 3x & +2y & +z & =5 \\ 2x & +2y & +z & =7 \\ ax & +y & +z & =-3 \end{cases}$$

の x が整数であるような整数 a の条件を求めよ.

第 3 章

基底と線形写像

3.1 一次独立

<予習>

- 高校で習ったベクトルを思い出しておきましょう．ただし，大学の線形代数では列ベクトル（縦ベクトル＝ n 行 1 列行列）でベクトルを書き表します．

— さて，ベクトルの章に入ったようだな．

— ベクトルは縦なのか〜．ずっと座標で横に数字を並べるのでなじんできたからなぁ．

— 郷に入りては郷に従えと．

補足 3.1　まず，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合であるとします．$x \in \mathbb{R}$ と書いたら,「x は実数である」という意味です．列ベクトルを定義しましょう．

サク単！定義 3.1 (列ベクトル)　m 行 1 列の行列を m **次列ベクトル**といいます．1 行 n 列の行列を n 次行ベクトルといいます．この教科書では特に断らない限り，ベクトルといえば**列ベクトル**のことだとします．

サク単！定義 3.2 (平面ベクトル)　2 次列ベクトルのことを**平面ベクトル**といい，平面ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書き表します．すなわち，平面ベクトルとは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表される列ベクトルで，$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ です．
3 次列ベクトルのことを**空間ベクトル**といい，空間ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^3$ と書き表します．すなわち，空間ベクトルとは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表される列ベクトルのことで，$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ です．

補足 3.2　高校ではベクトルのことを $\vec{a}$ や $\vec{v}$ のように矢印を使って書きましたが，大学の線形代数では $\boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{v}$ のように小文字の太字で書くのが普通です．ただし，平面上の 2 点 A, B を結ぶベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書くのはこれまでどおりです．

— これまで座標で $(1, 2)$ のように書いていたものを，縦に並べて書きなさい，ということだね．

— ちょっと不安なんだけど，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ って書いていいの？ $\in$ という記号の使い方なんだけど．

— あってるよ～「集合の要素」を意味する記号だからね．

— これまで $\vec{a} = (1, 2)$ と書いていたのを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と書けというわけだね．

— 早くなれないとね．

サク単！定義 3.3 (一次結合)　ベクトルを n 個選んできたとします．それを $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ であるとしましょう．実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して，

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合といい，$a_1, \cdots, a_n$ のことを係数といいます．

基本例題 3.1　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$a_1 = 3$，$a_2 = 5$ としたとき，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の一次結合で，$3, 5$ が係数です．

— 確認だけど，$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \end{pmatrix}$ の意味だよね？

— うん，大丈夫．

すべての成分が 0 であるようなベクトル（$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ など）を**零ベクトル**といっ

て $\boldsymbol{o}$ と書くことにします.

サク単！定義 3.4 (**線形関係**)　もし，一次結合が零ベクトルと等しい場合，つまり，

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

となる特別な場合を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の**一次関係**と呼びます．といっても，係数が $a_1 = \cdots = a_n = 0$ を満たすときにはいつでも一次関係はあることになるので，この場合は，**自明な一次関係**といいます.

参考 3.3　ベクトルの列 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ だけが先に与えられたとき，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$ は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を変数と見立てて連立方程式と見なすことができます．一次関係とは，この連立方程式を満たすような解 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ である，と言いかえることも出来ます.

基本例題 3.2　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ として，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{o}$ を解くことを考えます．すなわち $a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + 3a_2 + 5a_3\\2a_1 + 4a_2 + 6a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ であって，$\begin{cases}a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 0\\2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0\end{cases}$ を満たすような a_1, a_2, a_3 はあるでしょうか．目の子（グッと睨むこと）で探せば

$$1 \cdot \boldsymbol{v}_1 - 2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_3 = 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

などが見つかりますが，この２つの等式は一次関係の例です．下の式は自明な一次関係の例です.

— 一次結合というのは，どんなベクトルに対してもいつでもつくることができるんだね？定数倍したり加えたりして.

— そのようだね.

— 一次関係というのは，ベクトルの組によって，あったりなかったりする？のかな？

— 自明な一次関係はあったりなかったりするんじゃない？

— それを言うなら**自明でない**一次関係のほうじゃないかな.

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ とすると，} \begin{pmatrix}a_1+3a_2\\2a_1+4a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

でしょう？

— これを a_1, a_2 について解いてみるか．なるほど，$a_1 = 0, a_2 = 0$ となるね．これが自明な一次関係の意味なのかな？

— そうだろうね，$0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の意味だからね．つまり，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ には自明な一次関係はあるが，それ以外にはない，ということになるのかな.

— うん.

サク単！定義 3.5 (**一次独立，一次従属**)　与えられたベクトルの列 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，**自明な一次関係のみがある**とき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は**一次独立**であるといい，**自明でない一次関係がある**とき，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は**一次従属**であるといいます．教科書によっては**線形独立**，**線形従属**と呼びますが同じことです.

参考 3.4　ベクトルの列 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が与えられたとき，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$ を，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を変数とする連立方程式と見なしましょう．このとき

連立方程式が**一意解**を持つ $\Leftrightarrow$ 一次**独立**

連立方程式が**不定解**をもつ $\Leftrightarrow$ 一次**従属**

です.

基本例題 3.3　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ について，どのような一次関係があり

うるかを調べてみましょう．$a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\boldsymbol{o}$ と式を立ててみればよいわけですが，$\begin{cases}a_1+3a_2=0\\2a_1+4a_2=0\end{cases}$ を解くと $a_1=0, a_2=0$ となり，自明な一次関係のみを持つことがわかるので，$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ は一次独立です．

それでは，ベクトルを 1 つ増やして $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ はどうでしょうか？先ほどの例で見たように，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ という自明でない一次関係があることがわかっています．このことから，$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ は一次従属です．

基本演習 3.1　上の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次従属であることを $a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+a_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{o}$ を a_1, a_2, a_3 について解くことによって確かめてみましょう．

— 自明な一次関係しかないときが

— 「独立」か ····

— なんで独立っていうんだろう？

— 多分，どの 1 個のベクトルも他のベクトルの式で書けない，って事じゃないかな．

— じゃあ，一次従属だったら書ける，ってこと？ちなみに従属の意味は「権力や威力のあるものに依存して、それにつき従うこと。（大辞泉）」だって

— うん，たとえば，上のだと，移項すれば $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ とか書けるじゃない．これが「従属」の意味だと思うよ．

— なるほど，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ に従属している，ってことか．

サク単！公式 3.1 (一次従属) (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次従属ならば，どれか 1 つのベクトルを残りのベクトルの一次結合で表せます.
(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のうちのどれか 1 つのベクトルが残りのベクトルの一次結合で表せるならば，一次従属です.

基本例題 3.4 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると，

$-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので，一次従属です．このとき，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のように，$\boldsymbol{v}_1$ は $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表すことができます.

標準演習 3.2 上の公式が成り立つ理由を説明してみましょう.

— これはなんとなくわかる.
— じゃ，説明して，はい，どうぞ.
— えーと，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{o}$ なんだから，
$a_1\boldsymbol{v}_1 = -a_2\boldsymbol{v}_2 - a_3\boldsymbol{v}_3$
$\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{a_3}{a_1}\boldsymbol{v}_3$ でしょう.
— そういうことか.
— え，でも，$a_1 \neq 0$ じゃなければだめでしょう？
— えっ **⋯⋯** それは一次従属だからいえてるんじゃないの？
— うーんと，自明でない解 a_1, a_2, a_3 がある，ってだけでは，$a_1 \neq 0$ とはかぎらない.
— だめかあ．どう直せばいいのかなぁ.
— 自明でない解 a_1, a_2, a_3 があるとすると，a_1, a_2, a_3 のうち**少なくともどれか 1 つは 0 でない．**たとえば $a_1 \neq 0$ とすれば上の式変形により OK.
— もし $a_2 \neq 0$ だったら？
— $a_2\boldsymbol{v}_2$ だけを左辺にもってくればいい.
— そういうことですか.

サク単！定義 3.6 (線形空間)　ベクトルを要素とするような集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ が

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \in V$$

を満たすとき，V を**線形空間**，または**ベクトル空間**といいます．教科書によっては，**線形部分空間**，**部分空間**と呼ぶこともありますが，同じことです．

補足 3.5　この章では，線形空間の例と性質について調べていきます．$V = \mathbb{R}^2$ や $V = \mathbb{R}^3$ の場合を考えれば，上の条件式は当然満たされますので，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ は線形空間だといえます．

基礎問題 3.1　次の空間ベクトルの組は一次独立であるか？

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

解答:　(1) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ 3a_1 + 5a_2 = 0 \end{cases}$ を解く．

$$\begin{pmatrix} (a_1) & (a_2) & \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a_1) & (a_2) & \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a_1) & (a_2) & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（$(1,1)$ と $(2,2)$ で列の掃きだしを行った.）より，$a_1 = 0, a_2 = 0$ を得る．一意解を得たので一次独立である．

(2) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ 2a_2 + 2a_3 = 0 \\ -a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \end{cases}$

を解く．

$$\begin{pmatrix} (a_1) & (a_2) & (a_3) & \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a_1) & (a_2) & (a_3) & \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a_1) & (a_2) & (a_3) & \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（$(1,1)$ と $(2,2)$ で列の掃きだしを行った．）より，$a_1 = 2a_3, a_2 = -a_3$ を得る．不定解を得たので一次従属である． $\boxed{\forall}$

— a_1, a_2, a_3 は見にくいなぁ．x, y, z とかで解いてはいけないの??

— 要するに解ければ何でもいいので，解きやすい文字にしてもいいと思うよ．

— あとは連立方程式を解く作業か．復習しておかないとね．

— 一意解なら独立，不定解なら従属，というのが定義だからな．

標準問題 3.2　2つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立であれば，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$（$s, t$ は実数）と表せることを示せ．

解答:　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立なことから，$a_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は（a_1, a_2 について解いたとき）一意解をもつ．このことから，係数行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の階数は 2 である．

任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ を s, t についてとくと，

$\begin{cases} sa + tc &= p \\ sb + td &= q \end{cases}$ であり，この係数行列は $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ と一致する．A の階数が 2（かつ，文字変数が s, t の 2 個）であることから，この連立方程式は一意解を持つ． $\boxed{\forall}$

— なんだか急に抽象的になったな．

— 具体例で考えてみればいい．$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとどう？任意の平面ベ

クトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ って表せるかな？

— それだったら，s, t について解いてみればいいじゃない．

— つまり $\begin{cases} s + 3t = p \\ 2s + 4t = q \end{cases}$ だな．エーと解いて $s = \cdots$

— 直接イケルわけ？

— クラメルの公式があるからねぇ．$s = \dfrac{4p - 3q}{-2}, t = \dfrac{q - 2p}{-2}$ だね．

— すごいすごい．あ，だから，これが解ける，というようなことが「係数行列 A の階数が 2」とか「一意解をもつ」とか言っているわけね．

標準問題 3.3 空間ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ について，$\left\{ s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$ は線形空間であることを示せ．

解答: $s_1\boldsymbol{u} + t_1\boldsymbol{v}, s_2\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v} \in \{ s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} | s, t \in \mathbb{R} \}$ を任意の要素とすると，

$$a(s_1\boldsymbol{u} + t_1\boldsymbol{v}) + b(s_2\boldsymbol{u} + t_2\boldsymbol{v})$$
$$= (as_1 + bs_2)\boldsymbol{u} + (at_1 + bt_2)\boldsymbol{v} \in \{ s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} | s, t \in \mathbb{R} \}$$

であり，この集合が線形空間であることが示された． |∀|

— ベクトルの集合が線形空間かどうかをたしかめるのは適当にベクトル 2 つ持ってきてみて定数倍したり足したりしてみればいい，ってことかな？

— そういうことみたいだね．

— $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ とがあのベクトルでなくても別に成り立つじゃん．

— 最初からそういうと卒倒する人がいるからだろ．

— 確かに，$s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ っていうの，ちょっと違和感あった．

— でも $s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} s + 4t \\ 2s + 5t \\ 3s + 6t \end{pmatrix}$ なんだから当然空間ベクトルじゃない．

— そういわれるとそうなんだよね．

3.2 張る空間と基底

＜予習＞

- 一次結合と一次独立を思い出しましょう．

C— 一次結合は … なんだっけ

A— $2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ みたいな式を一次結合というんだったね．

C— じゃあ，一次独立は？

B— なんだよ，覚えておけよ． $a_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となる a_1, a_2 のことだったっけ？

A— ちがーう！$a_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となる a_1, a_2 が $a_1=a_2=0$ しかないとき，一次独立っていうんだよ．

B— 2 段がまえなんだな．

サク単！定義 3.7 (張る空間)　ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，これらのベクトルの一次結合で表せるようなベクトル全体の集合を**張る空間**といいます．記号は $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ を用います．すなわち，
$\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n\}$
です．張る空間は線形空間です．

基本例題 3.5　$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\left\{\boldsymbol{a}\,\middle|\,\boldsymbol{a}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix}\,\middle|\,a_1\in\mathbb{R}\right\}$ は，x 軸（$y=0$）のことです．

基本演習 3.3　$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ がどのような集合か調べてみましょう．

C— えっ ……

A— 何を調べればいいかわからない．

C— ともかく先生のだした例を真似してみる．

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\left\{\boldsymbol{a}\,\middle|\,\boldsymbol{a}=a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\2a_1\end{pmatrix}\,\middle|\,a_1\in\mathbb{R}\right\}$$

A— パラメーター表示だ．これって $\begin{cases}x=a_1\\y=2a_1\end{cases}$ っておいて，a_1 を消去できるでしょう．

B— できるねぇ．なるほど．そうすると，$y=2x$ ですか．直線の式というわけですか．

標準演習 3.4 $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ がどのような集合か調べてみましょう．

C— ええええええっ $\cdots\cdot$

S— よし，えーと，$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=\left\{\boldsymbol{a}\,\middle|\,\boldsymbol{a}=a_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\2a_1\\3a_1\end{pmatrix}\,\middle|\,a_1\in\mathbb{R}\right\}$

A— 前とおなじようにやるなら，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\2a_1\\3a_1\end{pmatrix}$ とおくと，$x=a_1, y=2a_1, z=3a_1$ だなぁ．ここからどうするの？

B— 文字を消せば，$y=2x, z=3x$ だけど，これって何？

S— 空間内の直線じゃない？

B— 高校で習ってない $\cdots\cdot$

S— だって，特定の 1 つの空間ベクトルの何倍かなんでしょう？そのベクトルを含むような空間の中の直線になると思うよ．図はかけないけど．

A— じゃあ，そういうことで．(一応先生にも確認しておこう.)

基本例題 3.6 $\mathbb{R}^2=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ です．その理由を説明しましょう．

例 3.12 でみたように，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ は一次独立でした．(ここでの一次独立は「平行でない」という意味です．) 一次独立な 2 つの平面ベクトルがあると，問題

3.20 で示したように，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ と表せます．このことはつまり，$\boldsymbol{v}$ は集合 $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ の要素だということです．まとめると，平面ベクトル全体の集合は $\mathbb{R}^2$ であって，任意の平面ベクトルは $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ に含まれますから，$\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ だということがいえます．

B— 油断してたらなんか難しくなってきた．

S— $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ っていうのは，$a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ という形で書けるベクトル全体の集合，だよね．

B— それはいいけど，なんで「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ は」とかいうわけ？

A— 百歩ゆずって，$a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ の a_1, a_2 を s, t に置き換えると $s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ だけどさー，これが平面ベクトル全体になることを言えばいいんでしょう？

S— 「$s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ が平面ベクトル全体である」と「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ の要素」，これ同じこと？

A— 似てると思うけど，なんだか示すべき向きが逆のような気もする．

S— あ，でも「$s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ が**全体**」っていうことは「どんな平面ベクトルも $s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ で表せる」ということじゃないの？

A— そっか.「$s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ で表せる」と「$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ の要素」は同じ意味だもんなぁ

B— なんだかちょっとつながってきた気がする．

基本演習 3.5 上の話をちゃんと納得してください.

標準例題 3.7 $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ を示してみましょう. ちなみに, $x + y + z = 0$ は空間内の平面を表しています.

この式は次の二つの意味を含んでいます.

(1) $x + y + z = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形で表せます.

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ というベクトルは $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\}$ の要素です.

この 2 つは両方成り立ちます. その理由を説明しましょう. まず (1) です. $x + y + z = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を考える, ということは方程式 $x + y + z = 0$ を満たす x, y, z を解くということです. これを「式 1 つからなる連立方程式」と考えると, $\begin{pmatrix} (x) & (y) & (z) & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を解くことになりますが, これはこのままで標準形です.(階数は 1 です.) y, z がパラメーターということになりますので, $y = s, z = t$ と置くことにより, 解は $x = -s - t, y = s, z = t$ であることがわかります. この解の式をベクトルの形で書いてみましょう.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

右辺は s, t を含む式ですので, s に関する部分と, t に関する部分にわけてみます.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このようにして $x+y+z=0$ を満たす x, y, z は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とあらわされることがわかります.

標準演習 3.6 以上の計算を検算してください.

A— これは …… どういう奇跡なんだ？
B— 実にたまたまわかったということなのか？
S— というか，$x+y+z=0$ を解いた形が $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であって，これを span の言葉で書いてみた，ということなんじゃないの？
A— それならまだわかる.

続いて，(2) を調べます. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $x+y+z=0$ をみたすでしょうか？このことは上の (1) の計算を逆向きにたどることによってわかります. ぜひ各自で調べてください.

標準演習 3.7 (2) を自分で確かめてください.

A— $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $x=-s-t, y=s, z=t$ としてしまっていいよね.
B— そりゃいいだろう.
A— ということは $x+y+z=(-s-t)+s+t=0$ ということだな.
B— なんだ，簡単だ. 代入してみるだけだね.
S— つまり連立方程式の不定解を，span を使って表せるということがわかったわけだ.

A— 遠まわしにそういうことをワカレと言われている気がするな.

サク単！定義 3.8 (基底・次元) ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとします. ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は線形空間 $W = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ の**基底**であるといい, このとき**線形空間** W **は** n **次元である**といいます. 基底は $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ と書き, 次元は $\dim(W) = n$ と書きます.

標準例題 3.8 これまで考えた四つの例について基底と次元がわかります.

(1) $W_1 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y = 2x \right\}$ とすると, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ は W_1 の基底で, 1 つのベクトルから基底が構成されているので 1 次元です.

(2) $W_2 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y = 2x, z = 3x \right\}$ とすると, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ は W_2 の基底で, $\dim(W_2) = 1$ です.

(3) $W_3 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$ とすると, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ は W_3 の基底で, 2 つのベクトルから基底が構成されているので 2 次元です.

(4) $W_4 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z = 0 \right\}$ とすると, $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ は W_4 の基底で, $\dim(W_4) = 2$ です.

A— とりあえず定義だけ見ておけばいいって, 先生が言ってた.

C— じゃあ, 定義は見たし, いいことにするか.

A— これだけじゃあ意味はよくわからないな. 一次独立なベクトルがあって, その張る空間を求めればいいんだろうけど, なぜこういうものを考えるんだろう？

サク単！公式 3.2 (基底・次元の意味)　ベクトル $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が線形空間 W の基底だとすると，W の任意の元 $\boldsymbol{v}$ はただ 1 つの方法で

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

と書き表せます．このことから，n 個のパラメータ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ によって W の要素が表せるというのが n 次元の意味です.

標準例題 3.9　$W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x+y+z=0 \right\}$ の任意の要素として，たとえば $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ を考えます．$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすような a_1, a_2 がただ 1 つ決まるかどうかを調べてみます.

実際に $\begin{cases} 2 = -a_1 - a_2 \\ 3 = a_1 \\ -5 = a_2 \end{cases}$ を解くと，$a_1 = 3, a_2 = -5$ と一意解が得られるので大丈夫です．W_4 の要素は a_1, a_2 をつかって表せるので W_4 は 2 次元だといえます.

一般的に，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が空間 W の基底だとすると，$W = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ であることから，$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ となるような $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が（少なくとも 1 つ）存在することがわかります.

「ただ 1 つの方法で」あることを示すには，2 通りあると仮定してそれが実は一致していることが示せればいいわけです．そこで，

$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \qquad \boldsymbol{v} = a'_1\boldsymbol{v}_1 + a'_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a'_n\boldsymbol{v}_n$

とおいてみます．辺辺を引いて，

$(a_1 - a'_1)\boldsymbol{v}_1 + (a_2 - a'_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (a_n - a'_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$ を得ます．この式は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の一次関係と見ることができますが，一次独立であることから自明な一次関係のみを持つことがわかっていますので，

$$a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2 = \cdots = a_n - a'_n = 0$$

が正しいことがわかります．このことは，２通りあると仮定した書き表し方が実は一致していることを意味しますので，書き表し方はただ１通りであることが示されました．

標準問題 3.4 $V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ はどのような集合か．また，V の基底と次元を求めよ．

解答: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ であることから $s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (s+u)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (t+u)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ と書ける．したがって

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix} \middle| a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

であって，これは xy 平面である．(式は $z = 0$ である．) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ は一次独立であるので基底は $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ で，2 次元である． $\boxed{{}^{|}\!\forall\!{}^{|}}$

B— これはどういう方針で解けばいいのかよくわからないな …

S— ３つあるように見えるけど，１つはいらないんだね．だから次元は 2 だと．

A— ２つだと一次独立だけど３つだと一次従属だから，とか言ってもいいのかな．

S— ああ，そういう感じっぽいね．先生にあとで確認しておこう．

3.3 線形写像，像，核

＜予習＞

- 行列と列ベクトルの積を思い出そう
- 張る空間の定義を思い出そう

A— 列ベクトルは m 行 1 列の行列だったから …

B— m 列の行列じゃなければダメですよね.

A— $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 11\end{pmatrix}$ みたいな感じでしょう？

B— $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 11\\ 17\end{pmatrix}$ なんていうのも一応「行列と列ベクトルの積」かなぁなんて思うんだけど，いいんだよね？ね？

A— え〜どうだろうか〜．一応いいと言うことなんだろうねぇ．

m 行 n 列の行列 A と，n 次列ベクトル（$= n$ 行 1 列行列））$\boldsymbol{x}$ との積 $A\boldsymbol{x}$ は定義により m 行 1 列になります．このことから，行列 A は $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して $A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ を対応させていると考えることができます．

基本例題 3.10 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ は 3 行 2 列の行列です．したがって，行列 A は $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対して $A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を対応させることになります．たとえば平面ベクトル $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ には空間ベクトル $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 11\\ 17\end{pmatrix}$ が対応しています．

B— いいみたいだね.

サク単！定義 3.9 (写像，線形写像)　(1) 2つの集合 A, B があったとき，f が「A から B への写像である」とは，任意の A の要素 $a \in A$ に対して，B の要素を対応させるルールが定まっていることであるとします．このとき，$f : A \to B$ と書き，a に対応する B の要素を $f(a) \in B$ と書きます．
(2) m 行 n 列の行列 A は「行列と列ベクトルの積」により，$\mathbb{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^m$ の要素 $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ へと対応させることができます．この意味で，行列 A は写像であると考えられますので，これを同じ記号で $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と書いて，これを**線形写像**と呼ぶことにします．

補足 3.6　A が正方行列 ($n = m$ の場合) には，A のことを**一次変換**と呼ぶのが一般的です．

基本例題 3.11　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$ なので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ となります．(この場合のカッコはつけてもつけなくともよいです.)

C— 要するに，なんだ？
S— ベクトルに行列をかけるとベクトルになるということでしょう．
C— それが「写像」なのか？
S— 写像は「対応させるルール」と言っているから，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を対応させているんじゃないの？
C— そんなものか．
S— $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ と書けば，A は写像という感じで $\cdots\cdot$
A— $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ と書けば，$A\boldsymbol{x}$ は行列と列ベクトルの積，という感じでしょうかね．
C— $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ だったら $\cdots$
S— もはやどっちでもよい（笑）のかな？

サク単！定義 3.10 (線形写像の像（イメージ）) m 行 n 列の行列 A に対して，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とあらわされる「$\boldsymbol{y}$ の集合」を行列 A の（線形写像 A の）像（イメージ）といって，$\mathrm{Im}(A)$ と書きます．つまり
$\mathrm{Im}(A) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$
です.

基本例題 3.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ とします．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とすると，

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+4t \\ 5s+6t \end{pmatrix}$$ です．したがって

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+4t \\ 5s+6t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$ です.

B— $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の計算まではわかる．これが行列とベクトルの積だからね．でもその次の式は何だ？

A— $s, t \in \mathbb{R}$ というのはどういうこと？

S— $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と同じ意味だと思う．きっと ····

B— そうか．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を自由に取ってよくて，その時の $A\boldsymbol{x}$ がどのようなベクトルになるか，というのを集めた集合ということだな.

A— それが最後の行の $\left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+4t \\ 5s+6t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$ ということか．でもこれが A の像だというのを百歩譲って認めたとしても,「これはナンなんだ」ということはちっともわからんぞ.

サク単！公式 3.3 (像と張る空間の関係) 行列 A を列ベクトルに分割して考えて，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ と表したとすると，
$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ です．

標準例題 3.13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ を列ベクトルに分解すると $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ となります．一方で

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+4t \\ 5s+6t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

となります．

標準演習 3.8 この公式の成り立つ理由を考えてみましょう．

A— 像の計算では $\begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+4t \\ 5s+6t \end{pmatrix}$ なんて書いていたものを，わざわざ s や t でくくるところがポイントだな．
B— そうだよね．ちょっと言われないと気がつかないよね．
A— $s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$ とかかけていれば span の要素だということだね．うまくつながった．

サク単！定義 3.11 (核（カーネル）) m 行 n 列の行列 A に対して，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となるような「$\boldsymbol{x}$ の集合」を A の核（カーネル）といって，$\mathrm{Ker}(A)$ と書きます．

C— カーネル？カーネルおじさん……？
S— それは意味が別．

基本例題 3.14 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ とします．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ という条件を満たす $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ はどのようなものかを考えてみましょう．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ より

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x+2y=0\\3x+4y=0\\5x+6y=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

したがって，この場合には $\boldsymbol{x}$ はいつでも $\boldsymbol{o}$ であって，$\mathrm{Ker}(A)=\{\boldsymbol{o}\}$ とわかります．

A— 核を求めるときには $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ を方程式とみなして解けばよいというわけか．
B— 方程式が解なしだったらどうするの？
A— $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ という解は必ずあるから「解なし」にはならないとおもうけどね．
B— あ，そうか．ともかく解を求めればいいということだね．

標準例題 3.15 $A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$ として，$\mathrm{Im}(A)$ と $\mathrm{Ker}(A)$ の次元の関係を調べてみましょう．これを列ベクトルに分解すると $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ で，$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ は一次独立ですが，$-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ という関係式があり，一次従属です．

まず $\mathrm{Im}(A)$ ですが，上の関係式より，$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=(x-z)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(y+2z)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ となりますので，

$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$ です．従って $\dim \mathrm{Im}(A)=2$（次元は 2）です．

S— 像の次元のほうは，前の授業の問題で解いたのと同じ要領だな
A— 関係式で書けているのは span からはずしてもよいと理解していいのかな？
S— そ．だから，一次独立になるまで減らしていいってことなんだよ．
A— 一次独立にできたら，それが基底で，その個数が次元ということか．
S— 飲み込みいいねぇ．

一方で，$\mathrm{Ker}(A)$ ですが，

$\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を x,y,z について解くということは，$(x-z)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(y+2z)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解くということなので，直ちに $x-z=0$，$y+2z=0$ を得ます．ここで $z=s$ とおけば $x=s,y=-2s,z=s$ という解を得ます．そうすると，この解の次元（自由度）は 1 です．

念のために確認すると，解 $x=s,y=-2s,z=s$ より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ なの

で，解の集合は $\left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\, s \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ となり，$\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$（次元が 1）であることがわかります．

標準演習 3.9　上の計算を検算してください．

A— 核を求めるには方程式を解けばいい，っていってたけど,「解の次元」というのと「核の次元」というのは同じなの？なんか混同してるけど．

S— ていうか，わざと同じ用語を使ってるんじゃない？

A— 解 $x = s, y = -2s, z = s$ というのから $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とできるところがポイントなんじゃないのかな？

S— そっか，それで span の言葉で書きなおせるというわけだ．

B— いつもこんなにうまくいくのかね．

A— ま，いまんとこはうまくいってる．

発展 3.7　ここで，考察をしてみましょう．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ を列に分解したところ，3 つのうちの 2 つは一次独立でしたが，1 つの関係式がありました．この状況から $\mathrm{Im}(A)$ の次元は 2 でしたが，これは一次独立だったベクトルの個数です．一方で，$\mathrm{Ker}(A)$ の次元は 1 でしたが，これは 1 つの関係式から x, y, z の 3 つの文字変数の連立方程式のうちの 1 つの文字が残ることがわかりましたので，関係式の個数と一致しています．一般に次の公式が成り立ちます．

サク単！公式 3.4 (**像と核の次元公式**) 行列を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトルに分解したときに，そのうちの k 個が一次独立であって，残りの $n-k$ 個は関係式で表せていたとします．このとき，$\mathrm{Im}(A)$ の次元は k で，$\mathrm{Ker}(A)$ の次元は $n-k$ です．従って特に，

$$\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n$$

が成り立ちます.（n は行列の列の数です.）

基礎問題 3.5 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$ の像の基底と核の基底を求めよ．像と核の次元公式が成り立っていることを確認せよ．

解答: 行列 A を列ベクトルに分解すると $\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}$ となる．まずは核のほうから求める．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ を解く．

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

行の基本変形により連立方程式の標準形を目指すと（途中計算は省略した）

$$\begin{pmatrix}(x)&(y)&(z)&(w)&\\1&2&3&4&0\\5&6&7&8&0\\9&10&11&12&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}(x)&(y)&(z)&(w)&\\1&0&-1&-2&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

とできるので，これを式に戻して

$$\begin{cases}x=z+2w\\y=-2z-3w\end{cases}$$ を得る．$z=s, w=t$ とおけば，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+2t\\-2s-3t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\implies\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

という $\mathrm{Ker}(A)$ の基底を得ることができ，次元が 2 であることがわかる．

次に，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $x\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解であることを思い出せば，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の関係式が得られるので，

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$$

となり，$\dim \mathrm{Im}(A) = 2$ であることが分かる．A は 3 行 4 列なので $n = 4$ であり，$\dim \mathrm{Ker}(A) = 2, \dim \mathrm{Im}(A) = 2$ であることを合わせると，次元公式が正しいことが確認できた． $\boxed{|\forall|}$

B— あのさ …… これって,「次元公式を確認せよ」って言われていなければ，次元公式を「利用して解く」のはイイんだよね？

A— いいだろうね．で，どうやってやるの？

B— 核の次元は連立方程式を解いて求めて，次元が 2 と分かるところまでは同じ．

A— うん．それはいいね．それで？

B— で，$\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ だから $\dim \mathrm{Im}(A) = 4 - 2 = 2$ だとわかる．

A— それが分かってもうれしくないよ？

B— いんや．うれしい．基底は 2 つのベクトルからなるってわかってるから,（多分）ただ $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle$ です，って言えると思うよ ……

A— ほえ〜〜〜．それでいいのか …· 一応先生にも確認してくるね．

3.4　和空間と共通部分の基底

＜予習＞

- 基底の定義を思い出しておこう
- 集合の共通部分（交わり）の定義を思い出しておこう.

— イチジドクリツなベクトルがあったとして，その span がどうのこうの.

— 一次独立くらい漢字で書けよ.「ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は空間 $W = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ の**基底**であるという」ということだな.

— 定義覚えられないんだけど.

— じゃあ，例だけでも覚えておくんだな.

— A と B の共通部分は「両方に含まれる要素」ってことだよね.

— はい，正解.

まずは３つの例題を解いてもらいます.

基本例題 3.16　$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z = 0 \right\}$,
$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y - z = 0 \right\}$ とするとき，$V \cap W$ の基底を求めよ.

基本演習 3.10　はい，どうぞ，解いてください.

— ええええ〜〜〜！

— やり方を教わっていませんけど！

— $V \cap W$ の要素にはどういうベクトルがあるかを解けばよいのでは ⋯

— 理屈ではそうだろうけど，どうやればいいの？

— $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \cap W$ とすると，$x + y + z = 0$ と $x + 2y - z = 0$ の**両方を**満たすことになるのでは？

— そういうことか …… な …… じゃあ，連立して解けばいいね．

— よしゃ，じゃあ $\begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ からはじめて行の基本変形で ……

— $\begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ かな？つづきやって．

— $x+3z=0, y-2z=0$ だから，$z=s$ とおいて $x=-3s, y=2s, z=s$ だ．

— えと，それを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とか置くんでしょう？で，どうすればいいの？span がどうのこうの言うんだよね．

— $V \cap W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ だから，基底は $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ だね．出ました！

先生： 正解．お疲れ様．

基本例題 3.17　$V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,
$W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ とするとき，$V \cap W$ の基底を求めよ．

基本演習 3.11　はい，どうぞ，解いてください．

— （急に教員からの指名を受けて）ぼくですか〜〜？（汗）どうする？これ？

— やっぱり方針は同じ？$V \cap W$ の要素にどういうベクトルがあるかを解けばいいんじゃね？

— じゃ，あ，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \cap W$ とするよ．で，で？span て何だっけ．

— $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおいていいって意味だよ.

— そっか．じゃああと，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけばよいと.

— 同じ s, t はダメだろう.

— あ，そんなもんなの？じゃあ …. 文字は何がいいの？

— $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で．なんだっていいんだよ.

— というわけで？ベクトルの成分を比較して $\begin{cases} s+3t & = -u+4v \\ -2s-4t & = u-v \\ s+t & = u+2v \end{cases}$ だね.

— 文字を左辺に移項して連立方程式の係数行列は $\begin{pmatrix} (s) & (t) & (u) & (v) & \\ 1 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ かな.

— 基本変形で標準形に ….

$$\begin{pmatrix} (s) & (t) & (u) & (v) & \\ 1 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (s) & (t) & (u) & (v) & \\ 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$ だな.

— 同じにならない …..

— 合うまで計算してろよ．で，$s = -9v, t = 6v, u = -5v$ を元の式に代入すると …

— おおお！ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ だ！

— というわけで，$V \cap W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ で $\left\langle \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ が基底.

先生： 正解．お疲れ様． じゃあ3つめもどうぞ.

基本例題 3.18 $V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,
$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + 2y - z = 0 \right\}$ とするとき，$V \cap W$ の基底を求めよ.

基本演習 3.12 はい，どうぞ，解いてください.

— 経験値あがってるはずだからな〜〜

— お前の場合，MP が足りないとか（笑）

— やっぱり方針は同じ？$V \cap W$ の要素 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ について解けばいいと.

— やっぱり $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおいてよい.

— それはいいと思う．W のほうはどうするの？

— どうするって，$x + 2y - z = 0$ を満たしていればいいんだから，これそのままブチこめばいいんじゃない？

— んじゃ，そうする．$x = s + 3t, y = -2s - 4t, z = s + t$ だから，これを $x + 2y - z = 0$ に代入して，$(s + 3t) + 2(-2s - 4t) - (s + t) = 0$．これを整理して $-4s - 6t = 0$ だ．こっからどうするの？

— t を消せばいいんじゃない？ $t = -\frac{2s}{3}$ だから.

— $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2s}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

— そうかそうか．じゃあ，基底は $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$ です！

先生： はい正解．おつかれさまでした．

— っていうか，なんだかおんなじ問題を 3 回解かされたような気がするのはボクだけでしょうか？

標準演習 3.13　上の 3 つの問題では実は V と W は共通のものでした．ということは答えも同じものです．そのことを示してください．

— それを最初から言ってくれれば ……

先生： 言ったらマジメにやらないでしょ，君たち．

— あ，でも $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ と $\left\langle \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ と $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$ とは同じ基底ということなんですね．

— 正しくは「同じ空間の基底」だと思うよ．

— 基底のとりかたはいろいろあると．

標準例題 3.19　$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ であることを示せ．

基本演習 3.14　はい，どうぞ，解いてください．

— 要素の対応がつけばいいんじゃない？

— $s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とを対応つけるわけ？

— 同じ s, t を使ってどうするの．文字を別にして，同じベクトルがこっちではこう，あっちではああ，みたいに表示できないのかな，って．

— ああ，じゃあさっきみたいに，$s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とお

いて，s,t,u,v について解いてみる？

— 連立方程式に直すと $\begin{cases} s+3t &= u-3v \\ -2s-4t &= -2u+2v \\ s+t &= u+v \end{cases}$. これを左辺に寄せて，…… ええと …… 解くのは …… 任せた！

— 任せるなよ．自分でやれよ．

$$\begin{pmatrix} (s) & (t) & (u) & (v) & \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (s) & (t) & (u) & (v) & \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ だぞ．

— $s=u+3v, t=-2v$ だな．つまり？ ？ ？ 何が結論なんだ？

— うーん？ $(u+3v)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2v\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ということ？

— つまり，この左辺は $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ の要素で，右辺は $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ の要素で，それが等号で対応している，ということではないかな．

— $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ の任意の要素に対して，$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ の要素が対応しているダケのような気もするぞ．なんとなくだが ….

— 細かいなぁ．じゃあ，$s=u+3v, t=-2v$ を u,v について解いて $u=s-\frac{3}{2}t, v=-\frac{1}{2}v$ ってことで，

— ごちゃごちゃしてきたが，それでいいということで

— いいということで．

先生： 分かって言ってる？ 大丈夫かなぁ

サク単！定義 3.12 (和空間) 2つの線形空間 $V, W \subset \mathbb{R}^m$ に対して，**和空間** $V+W$ を

$$V+W=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v}\in V, \boldsymbol{w}\in W\}$$

により定義します.

基本例題 3.20 $V = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k)$, $W = \mathrm{span}(\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_h)$ ならば，$V+W = \mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_h)$ です.（そういうもんだと思ってください.）

基本例題 3.21 $V=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\right)$,

$W=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ とするとき，$V\cap W=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ でした.

このことから，

$V=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right), W=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ と書き変えることができる（問題 3.59）ことに注意しましょう．すると，

$V+W=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

であることがわかります.（$W\cap V$ の重複した分を取り除くことができます.）このことを一般化して，次の公式が成り立ちます.

サク単！公式 3.5 (和空間の次元公式)
$\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)$

基礎問題 3.6

$V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right), W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ とするとき，

$V \cap W$ の基底と $V + W$ の基底を求めよ

解答:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V \cap W$ とすると，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

である.（計算は省略するが）これを解いて $s = -\frac{1}{2}v, t = \frac{1}{2}v, u = -v$ である.

従って $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるので，$V \cap W$ の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ である.

$$V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \text{ と考えられる}$$

ので，$V + W$ の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. $\boxed{{}^{|}\forall{}^{|}}$

— この授業に出てきた方法を復習すればなんとかたどれると思うヨ.

— 省略されてる連立方程式のところが案外大変な気もするけど.

— V と W で共通な基底を見つけるところがやっぱりミソかな.

3.5　基底による線形写像の表示

＜予習＞

- 基底の定義を思い出しておこう
- 線形写像の定義を思い出しておこう

— 基底は一次独立で，張る空間になっているもののことだな．
— を．だんだん簡潔に言えるようになってるんじゃない？
— 簡潔すぎるという説はないか？
— 線形写像は …. そんなのあったっけ？基底に振り回されて分からなくなってるよ．
— 像と核のところにあったな．行列とベクトルの積であらわされているようなものだ．

サク単！定義 3.13 (基底による線形写像の表示)　m 行 n からなる行列 A を考えます．$\mathbb{R}^n$ の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ と，$\mathbb{R}^m$ の基底 $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ に対して，

$$A\boldsymbol{e}_j = b_{1j}\boldsymbol{f}_1 + b_{2j}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + b_{mj}\boldsymbol{f}_m \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

とあらわされるとします．このとき，行列 $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)}$ を**基底による線形写像 A の行列表示**といいます．

基本例題 3.22　$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とします．$\mathbb{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対して，A の基底による行列表示を求めてみましょう．まずは記号の確認です．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ です．}$$

まず $j = 1$ のときの式を書き下してみると，$A\boldsymbol{e}_1 = b_{11}\boldsymbol{f}_1 + b_{21}\boldsymbol{f}_2$ です．分

かっている式を代入すると，

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = b_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -13 \\ 6 \end{pmatrix} = b_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2b_{11} + 3b_{21} = -13 \\ 3b_{11} + 5b_{21} = 6 \end{cases}$$

$\longrightarrow b_{11} = -83,\ b_{21} = 51$

同じように $j = 2, 3$ の場合も計算してみると，

$A\boldsymbol{e}_2 = b_{12}\boldsymbol{f}_1 + b_{22}\boldsymbol{f}_2 \longrightarrow b_{12} = -92,\ b_{22} = 57$

$A\boldsymbol{e}_3 = b_{13}\boldsymbol{f}_1 + b_{23}\boldsymbol{f}_2 \longrightarrow b_{13} = -132,\ b_{23} = 82$

であるので，以上より求める行列表示は $B = \begin{pmatrix} -83 & -92 & -132 \\ 51 & 57 & 82 \end{pmatrix}$ となります．

— すごい数になってしまったが，仕方がないのかな．

— 手順が決まっていて，その手順に従って計算するだけだろう．

— $A\boldsymbol{e}_j = b_{1j}\boldsymbol{f}_1 + b_{2j}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + b_{mj}\boldsymbol{f}_m$ というと分かりにくいが，具体的に $j = 1$ とかいれて式を書いてみることができれば，あとは連立方程式を解くだけという感じかな．

— ここんとこ，ハードなのが続いてたから「ルールに従って計算すれば求まる」みたいなのは結構うれしい気がするね．

サク単！公式 3.6 (基底に関する行列表示の公式)　m 行 n からなる行列 A, $\mathbb{R}^n$ の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ と，$\mathbb{R}^m$ の基底 $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ が与えられているとします．それぞれ基底を並べたような行列 $P = \left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\right), Q = \left(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\right)$ を考えると，P, Q は正則行列であって，基底による線形写像の行列表示 B は $B = Q^{-1}AP$ で得られます．

基本演習 3.15　上の例で，$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ であることを

確認し，公式 $B = Q^{-1}AP$ を検算してください．

— これも検算してみればいいだけの話なので ⋯⋯
— 試験前にちょっとチェックしておけばいいか．
— というか，今チェックしておけば，試験前には計算しないでいいんじゃないか？
— どっちがいいかはビミョーだな．

上の公式において，基底を並べたような行列が正則行列であることを暗に認めていますが，そのことを確かめてみましょう．

サク単！公式 3.7 (基底と正則行列)
n 次正方行列 A を列ベクトル $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ に分割したとします．このとき，A が正則行列であることと，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であることとは必要十分条件です．

標準例題 3.23　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると,「行列式が 0 でなければ正則行列である」という公式があるので，行列式を計算してみると，

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 15 + 2 + 9 + 0 = 25 \neq 0$$

となっているので，A は正則行列です．A を列ベクトルに分割すると $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ です．この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底であるかどうかを調べてみましょう．そのためには次の 2 つを調べれば十分です．

(1)　$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は一次独立

(2) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$

まず (1) を調べてみます．一次独立であることを示すには，一次関係

$a\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ が自明な一次関係しかないことを示す必要があります．

標準演習 3.16　自明な一次関係とは何かを正確に書いてみましょう．

$a\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\3 & 1 & -2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ですから，この式の両辺に左から A^{-1} をかけます．

$$A^{-1}A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ここで $A^{-1}A = I$ ですから，$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ であることがわかり，自明な一次関係しかないことが示されました．従って一次独立であることが示されました．((1) の証明終)

— $a\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ だったら $a = b = c = 0$ を示せればいいわけ $\cdots\cdot$ だよね．

— 一次独立っていうのはそういうことだったよ．一意解がある，と言っていたからね．

— で，A が正則行列であることを使うわけだけど，正則行列とは「逆行列がある」ということだから，逆行列をかけてみると．

— そうか．$A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ というのが案外ポイントだったりするのかな．

次に (2) を調べてみましょう．このことを示すには，任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$a\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ となるような a,b,c が存在することを示さなければいけません．これも $\begin{pmatrix}1&3&5\\3&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ と立式して，逆行列をかければ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とできますので，a,b,c は求まることになります．したがって (2) も正しいことが示されました．

— 「A が正則」ならば「列ベクトルたちは基底」というのはだいたいこういうスジなんだろうなぁ．

— そうだよね，行列 A がこの数字だ，ということは証明のなかではぜんぜん使っていないよね．正則行列で A^{-1} が存在するんだったら，なんでも同じ理屈で言えてるよね．

— 任意の $\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ についてどうのこうの，というのはどうして？

— 例 3.26 に同じような話があったよね．そういえば．

— あ〜あそこでは理解したつもりだったんだけどなぁ．$\mathbb{R}^3$ の全部のベクトルがそうなっている，ということを示したいからこういう方法になっているというわけか．

標準例題 3.24　$\mathbb{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ が与えられたとしましょう．

（この列ベクトルの組が基底であることは，まだ確かめていませんが，今は大丈夫

だという仮定のもとで話を進めてみましょう.）任意の空間ベクトルは $a\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ の形で書き表すことができることを利用します．これを $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ の 3 つの場合に利用するのです．つまり，こういうことです.

$$a\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$a'\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+b'\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+c'\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$a''\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+b''\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+c''\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

このような $a,b,c,a',b',c',a'',b'',c''$ があることは保障されているわけですので，これらの式を次のように並べ替えてみます.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&1\\5&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(\star)$$

この式は行列 $\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&1\\5&4&-2\end{pmatrix}$ に逆行列が存在していることを意味しており，正則行列が得られていることを示しています.

標準演習 3.17　上の等式を検算してください.

— え？並べ替えてみる，ってどういうことなのかな？

— うーんと，たとえば，$a-b+2c=1$ とか $3a+b+c=0$ とか，そういう式が上の式にはあるよね．

— あるねえ．全部で 9 個の式があると思えるよね．

— 式 $(\star)$ の左辺を計算すると，どういったわけだか $a-b+2c$ とか $3a+b+c$ とかいった式が出てきて，それらがピッタリ単位行列になるように並んでいる，ということらしい．

— !!! 〜〜〜それって，どういう偶然なわけ？

— 偶然というよりは仕組まれたワナみたいな感じだとおもうぞ．

— へぇ〜〜〜．これは教員が思いついたわけ？

— いや，そうではないらしいが，数学のプロだとこういうことはすんなり思いつくらしい．

— 将棋の 11 手詰めみたいなもんか．アマチュアには思いつかないな．

標準問題 3.7　3 次正方行列 A が次の性質を満たすとする．

$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ について，

$A\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{v}_2=-\boldsymbol{v}_2$，$A\boldsymbol{v}_3=-4\boldsymbol{v}_3$ が成り立っているものとする．

(1) このとき，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを確かめ，この基底に関する A の行列表示が $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ であることを示せ．

(2) 基底を並べた行列を $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}$ としたとき，

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ であることを示せ．

解答:　　(1) 基底を並べた行列を $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}$ としたとき，$|P|=-2+0-1-1-2+0=-6\neq 0$ であるので，P は正則行列．公式 3.66 により，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．また，行列表示 B の定義により，

$A\boldsymbol{v}_1=b_{11}\boldsymbol{v}_1+b_{21}\boldsymbol{v}_2+b_{31}\boldsymbol{v}_3$ であるが，条件 $A\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{v}_1$ により，$b_{11}=$

$2, b_{21} = 0, b_{31} = 0$ である．以下同様にして，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ を確認できる．

(2) 公式 3.73 に，$P = Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ を当てはめれば，ただちに $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ を得る． $\boxed{|_{\forall}|}$

— 公式を当てはめるだけか ⋯

— だけど，あとあと出てくるらしいよ ‥ この計算.

3.6　回転，拡大，シアー，アフィン変換

＜予習＞

- 「２＊２行列と平面ベクトルの積」「３＊３行列と空間ベクトルとの積」を思い出そう
- 線形写像について思い出そう

A— ２＊２行列と平面ベクトルの積って $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 6\\ 3\cdot 5+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\ 39\end{pmatrix}$ っていうようなのだよね．

S— うん，こういうのみたいに，行列とベクトルの積でつくれるような「ベクトル $\to$ ベクトル」という対応を線形写像っていうんだよね．

この回は，平面ベクトルから平面ベクトルを与えるような線形写像 $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の実例をいくつか与えましょう．どれも重要な例で，応用がきくものばかりです．

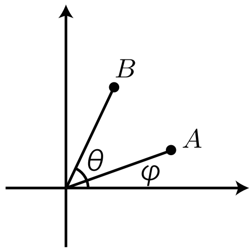
サク単！公式 3.8 (**原点中心の回転**)　平面において，原点中心の θ 回転（反時計回り，単位はラジアン）を表す行列は $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ です．

基本例題 3.25　$\theta=\frac{\pi}{3}$ ならば，回転を表す行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ですので，たとえば，平面上の点 $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転させた点は

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}+2}{2}\end{pmatrix}$ となります．

基本演習 3.18　点 $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$ を原点中心の θ 回転させると，点

$B\begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$ へ移ります．このことを利用して，回転の行列を求めてください．



B— 図にかけるとなんだかウレシイな．

S— あ，でもオレ，平面までだな．立体の絵描かれてもわからないよ．

A— そうそう，透視図？とか空間把握？っていうのは昔からできなかったよ．

S— えっと，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$っていうのは，$x$ 軸（正の方向）から見て φ の角度の方向だから，これをさらに θ 回すと $\begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$ になる，ってことだな．

A— 図からいって，そういうことだな．あとはどうするの？

S— 加法公式じゃない？

A— あー自信ないけど，$\begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$ か？

S— ああ，これが $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と等しいって言ってるのね．ホントだね．

サク単！定義 3.14 (**拡大・シアー**)

(1) 原点中心の定数 c 倍の拡大を表す行列は $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ です.

(2) 定数 b に対して，行列 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される線形写像を (x 方向の大きさ b の) **シアー**といいます．シアーは面積を変えずに形をゆがめるような写像の 1 つです.

基本例題 3.26　点 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を原点中心の 3 倍の拡大で移すと $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ へと移ります.

点 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を x 方向の大きさ $\frac{1}{2}$ のシアーで移すと $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ へと移ります.

基本演習 3.19　上の計算を検算してください.

S— これは行列の形が先に分かっているから，実際に計算するのは簡単だな.
B— ちょっと気になったんだけど ····
A— 何
B— 「$\frac{1}{2}$ 倍の拡大」っていうのかなぁ？$\frac{1}{2}$ 倍だから「縮小」だと思うんだけど.
A— もっともだな，先生に聞いてくるよ.
（後日）
A— 大きくなるのは拡大，小さくなるのは縮小，でいいってさ.
B— じゃあ，見たとおりだね.
A— シアーっていうのはあんまり見かけないけど？
S— グラフィックのソフトを使っているとときどき見かけるぞ．図形をゆがませるときにつかうよ.

サク単！定義 3.15 (平面の平行移動) 平面ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ について，平面上の点をベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に沿って平行移動する変換 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

で与えられます.

基本例題 3.27 ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に沿った平行移動は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ で与えられます.

S— 平行移動は高校のとき,「グラフの平行移動」で習った気がする.

A— これは行列ではかけないね．平行移動というのは線形写像ではないんだよね.

B— ところで，$\mapsto$ってどういう記号？ただの矢印と違うのかな？

A— 先生によると，写像によって対応する要素の結びつきを $x \mapsto x'$ のように書くらしいよ．$\to$ は写像の定義域や終域などの集合を結ぶための記号なんだって.

B— つまり，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で，$f : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ のように使うわけだな.

A— そうだね.

サク単！定義 3.16 (平面のアフィン変換) 線形写像と平行移動を合成した（＝引き続いて行った）ような写像を平面のアフィン変換といいます.

基本例題 3.28 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ による平面の線形写像 $A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$ です．ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ による平行移動を

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 2 \end{cases}$ です．この 2 つの写像を合成することは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ と一続きに考えることです．今，

$x'' = 2x + 3y + 1, y'' = 4x + 5y + 2$ ですから，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y + 1 \\ 4x + 5y + 2 \end{pmatrix}$ はアフィン写像です．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ から構成できるアフィン写像は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$ です．これは $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と書き表すこともできます．

サク単！公式 3.9 (アフィン写像の行列表示)　平面ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のかわりに空間ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ とを対応させて考えると，行列 $\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ はアフィン変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$ を表します．

実際に，$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \\ 1 \end{pmatrix}$ です．

基本例題 3.29　公式 3.86 の方法により，(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の平行移動，(2) 原点中心 $\dfrac{\pi}{2}$ の回転を表す行列をつくってみます．平行移動は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表され，回転

のほうは $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表されます.「回転・平行移動」の順に写像を合成すると

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となります.

基本演習 3.20 上の行列の積が正しいことを確認し,「平行移動・回転」の順に写像を合成してみてください.

B— これは?「回転・平行移動」の順に, と言っているのに, 行列のほうは平行移動を左からかけているぞ.

S— $\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \\ 1 \end{pmatrix}$ みたいに行列は左からかけるからだろう?
あとからかけるほうが**より左**になるのは成り行き上当然だと思うけど?

B— そうか. 仕方ないのか …. まぁそういうことだったら「平行移動・回転」の順にというのは $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だな. これは …. 掛け算をすると

A— $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であってる?

B— さっきのと結果が違うな. つまり, **平行移動と回転は順序を変えると結果が違ってくる**ということだ.

S— まぁそれはともかく, これで平行移動と回転移動とを同列に扱うことができるので便利になったな.

B— これは 3 次元の回転にもいえるかなあ, というか, 3 次元の回転と 3 次元の平行移動を一緒に扱えるとうれしいんだけど.

S— たぶんできるだろうね. ただしそのためには 4 次正方行列が必要だろうね.

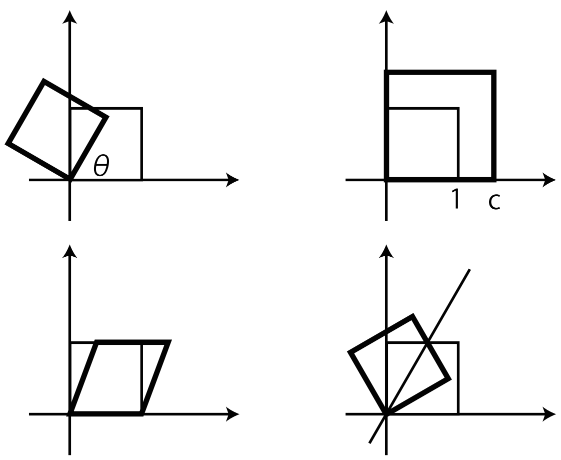
$$\begin{pmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz+p \\ dx+ey+fz+q \\ gx+hy+iz+r \\ 1 \end{pmatrix}$$

こんな計算でどうかな．

B— すごいすごい〜〜〜$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ のところに回転の行列を当てはめればいいわけだね．

基礎問題 3.8 回転 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，拡大 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$，シアー $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，線対称 $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ のそれぞれについて，正方形 $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で移した絵を描いてみよ．

解答:



A— なるほど，こうやって並べてみると，それぞれの個性がよくわかるね．

B— シアーがなんだかおもしろいな．これ，何の役に立つの？

A— コンピュータグラフィックスの画像処理なんかで使うって話は聞くけどね.

> **標準問題 3.9** 原点を通る直線 ℓ が, x 軸正の方向と θ の角をなすとき, 直線 ℓ に関する線対称移動 (図) を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ であることを示せ.

解答: まず「$-\theta$ 回転」$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ をした後に,「x 軸対称移動」$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ をおこない, その後に「θ 回転」$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を行えば, 求める移動を実現できる. (図) これを行列で計算すると (先に行うほうを右側に書くことに気をつけて)

$$CBA = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \qquad \boxed{|_{\forall}|}$$

B— 最後の行列の計算が合わない …… 答えあってる？

A— うーーー. 合って …. る .. ような ……

B— じゃ, あってるってことでい〜や. ねえ, これ Bって, どうしてこういう行列なの？

S— x 軸対称って $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ でしょう？これは $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とも書けるからねぇ.

B— そういうことか. じゃぁ, y 軸対称移動は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だね.

S— そゆこと.

後期中間試験

＜予習＞

- 3-1:一次独立と一次従属
- 3-2:張る空間と基底
- 3-3:線形写像，像，核
- 3-4:和空間と共通部分の基底
- 3-5:基底による線形写像の表示
- 3-6:回転，線対称，拡大，シアー，アフィン変換

後期中間試験

[3-1]

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$ が一次従属になるような a の値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次独立のとき，$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ が一次独立であることを示せ．

[3-2]

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x+2y+3z=0 \right\}$ の基底を求めよ．

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ -2x-3y+2z=0 \end{array} \right\}$ の基底を求めよ．

[3-3]

行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ の像と核の基底を求めよ．

[3-4]

$$V = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right), W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$ のとき, $V \cap W$ と $V + W$ の基底を求めよ.

[3-5]

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ について, 行列 A が $A\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$ を満たすとき, A を求めよ.

[3-6]

3 点 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ は平面上の正三角形の頂点である.

(1) B を固定し, A と C を交換するような線形写像を求めよ.

(2) A を C へ, C を B へ, B を A へ写すような線形写像を求めよ.

第 4 章

内積・外積

4.1 内積と性質

<予習>

- 転置行列を思い出そう
- ベクトルの内積を思い出そう

B— 転置行列は …… なんだけ.

S— 行の役割と列の役割を入れ替えたような行列だな.

A— ${}^t\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$ みたいなはなしか.

B— 内積は？高校でならったアレのこと？

S— そうそう，$\vec{a} = (1,2), \vec{b} = (3,4)$ だったら，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 11$ だったね.

サク単！定義 4.1 (ベクトルの内積)

2 つの m 次列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ に対して，その内積を

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m$

で定めます.

補足 4.1 内積の記号は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ のほかに，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ や $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ が用いられますが，どれも同じ意味です.

A— いきなり！記号が違うんですけど！

B— こまるなぁ，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で慣れてきてたんですけどお.

C— ……․

サク単！公式 4.1 (ベクトルの内積（転置行列による表示）) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$

基本例題 4.1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とすると，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ です．また，${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ と計算されることも分かります.

> **サク単！定義 4.2 (ノルム)** 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ に対して，$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2}$ と定めます．ノルムはベクトルの長さを表しています.

基本例題 4.2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすると，$||\boldsymbol{a}|| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

A— これも？高校の時は $|\vec{a}|$ と書いていたような気がする …. 同じこと？

S— 同じこと … だと思うよ.

A— なんで，記号を変えちゃうんだ？

S— 先生がいうには，大学で習うほうが標準国際規格なんだって.

B— じゃあ，高校のほうが特殊な記号だったっていうの？

S— え＝と，特殊なんじゃなくて，歴史的な経緯でこうなったということらしいよ.

サク単！公式 4.2 (ベクトルの基本公式)

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$

(2) 実数 $d\in\mathbb{R}$ に対して，$(d\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},d\boldsymbol{b})=d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$（(1)(2) あわせて多重線形性といいます.）

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ (対称性)

(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0$ ただし $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$ は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る. (正値性)

基本例題 4.3

(1) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1+3\\2+4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=(1+3)\cdot 5+(2+4)\cdot 6$

$\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 5+4\cdot 6$

(2) $\left(2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}2\cdot 1\\2\cdot 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=2\cdot 1\cdot 5+2\cdot 2\cdot 6$

$2\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=2(1\cdot 5+2\cdot 6)$

(3) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right)=1\cdot 5+2\cdot 6=\left(\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

(4) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=1\cdot 1+2\cdot 2\geq 0$

A— これはだいたい高校のときに習ったからいいかな.

C— いんや，わからん．だいたいがなぁ，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$っていうのはつまり，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ ということだろう？

A— そう **····** だね.

C— ナカポチのほうがずっとわかりやすいぞ.

A— 仕方ないじゃん.

サク単！定義 4.3 (ベクトルのなす角)　(1) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，そのはさむ角 θ（ただし $0 \leq \theta \leq \pi$）を

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||}$$

によって定めます.

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は**直交している**といいます.

C— πってナニ？円周率？

B— （絶句 ····）ラジアンって知ってる？

C— あ＝知ってたかもしれないけど忘れた.

B— 角度の単位ね．π と書いたら 180 度のことだって覚えておけばいいよ.

C— だったら 180 度って書けばいいじゃない.

A— それはね，いろいろ「大人の都合」があるんだよ．こっちを覚えておきなってさ.

サク単！公式 4.3 (余弦定理)　2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，
$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

基本演習 4.1　この公式を基本公式から証明してください.

B— なんでこれが余弦定理なの？$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ とか覚えてたんだけど ···

S— $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ってことでしょ.

B— $||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ わ，ホントだ．余弦定理っぽくなった．いきなり.

A— 示せっていわれてるけど ···· 高校のとき教わった気もするけど忘れた.

S— $||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ だから，これを展開すればいいよね.

C— チョット待て！まだ昔の書き方でないとわからないんだけど．$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ だな.

S— そ．だから展開すれば $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ で ······

B— よし，すこし分かってきたよ ····
$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ だな？

A— 最後の符号が逆だよ.

B— うるさいなァ，わかってるよ．$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ でしょ.

S— $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ をつかっていいから，
$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ で，公式 4.10 までたどり着いたね！！！

サク単！公式 4.4 (**行列と内積の公式**) 任意の n 次正方行列と n 次列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して，$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ {}^t\!A\boldsymbol{y})$ が成り立ちます.

基本例題 4.4 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ とすると，

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot6\\ 3\cdot5+4\cdot6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right)$$
$$=(1\cdot5+2\cdot6)\cdot7+(3\cdot5+4\cdot6)\cdot8=431$$
$$(\boldsymbol{x},\ {}^t\!A\boldsymbol{y})=\left(\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\cdot7+3\cdot8\\ 2\cdot7+4\cdot8\end{pmatrix}\right)$$
$$=5\cdot(1\cdot7+3\cdot8)+6\cdot(2\cdot7+4\cdot8)=431$$

基本演習 4.2 上の計算を検算してください.

B— 行列と内積の公式だって …

S— 高校では習わなかったな．習ってもよさそうなのに.

A— ていうか，転置行列は高校では習わないからねぇ.

S— こうやって計算の明細を見せられると，一致してもそれほど驚かないよね.

A— でも，なんか「目に見えない仕組み」みたいのがウラで働いているような気がしなくもない.

S— 先生が $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\cdots$ で始めて証明できるよ，って言ってたよ.

B— ええ〜〜！そういうレベルの話なの？やってみる？

A— おそるおそるやってみよう.

B— $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\cdots$ で，どうするの？やっぱりできないじゃない（大笑）

S— 公式 4.3 だな．きっと.

B— $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ でいいのかな？

A— $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ にカッコがほしいぞ.

S— じゃ，$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$ ということで.

B— $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}={}^t\!A\,{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ってやっていいの？

A— 結論みて，予定調和的にウマクいくように式変形する才覚は必要だとおもう（笑）それだと結論にたどり着かない ···· ということは変形が間違ってるんだよ．

B— あ，なんか転置行列の公式あったな ···· 公式 1.25 か．

A— 順番が入れ替わるアレ．${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ これだ！

B— $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\boldsymbol{y}$ がただしい．で，これどうするの？

S— もう一回公式 4.3 つかえば
$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$ じゃない．

B— あ，そうか．おお，いえたいえた．

A— すごいすごい．

基礎問題 4.1

(1) 内積 $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$ を計算せよ.

(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ のなす角を θ としたとき，$\cos\theta$ を求めよ.

解答: (1) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right) = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32$

(2) $$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||} = \frac{\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{32}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+5^2+6^2}} = \frac{32}{7\sqrt{22}}$$

S— これは定義の式に従って計算すればいいね.

A— こうやってみると，空間ベクトルなのに $\cos\theta$ が求まるって，なんか大変なことのような気がするな．でも公式だからねぇ．いいんだよねぇ.

B— あ！ え！ ？ あのさ，$\dfrac{32}{7\sqrt{22}}$ って 1 より小さいのかなぁ？

A— さあ？あそうか．cos だから 1 以下じゃないと角度 θ がないことになっちゃうね.

S— なんだか不安になってきた ···· 先生に聞いておこう.

標準問題 4.2　シュワルツの不等式を証明せよ．
$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||$

解答:　$f(t)=||t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2$ とする．この式を計算すると，
$f(t)=(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(t\boldsymbol{a},t\boldsymbol{a})+(t\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},t\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$
$=t^2||\boldsymbol{a}||^2+2t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+||\boldsymbol{b}||^2$
この式を t についての 2 次式だと思うと，$f(t)\geq 0$ であることからその判別式は 0 以下である．
$D/4=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2-||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2\leq 0$
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\leq||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2$
正の平方根をとって
$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\leq||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||$ が示された．　$\boxed{{}^{\shortmid}\forall{}^{\shortmid}}$

B— 判別式って，2 次方程式のアレのこと？
S— そうだね，$f(t)=at^2+2bt+c$ だったら，判別式は $D/4=b^2-ac$ だったね．
A— $f(t)$ と置いて計算できれば，後の部分の理屈はわかるんだけど，最初に $f(t)$ を置くところが 100 年たっても思いつかないと思う．
S— だからこそシュワルツさんの名前が付いている，ともいえる．
A— そっか．そうじゃなければ僕の名前がついたっていいわけだもんね（笑）
B— 先生がね，この不等式があるから，角度が cos で求まる，って言っていたけど，どういう意味？
S— あーそれはね，角度 θ は $\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||}$ だったでしょう？シュワルツの不等式がわかっていれば，分子のほうが小さいってことがわかるじゃない．
B— あーつまり，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=32$ は $||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||=7\sqrt{22}$ より必ず小さいというわけだ．
A— $\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||}$ が 1 以下（かつ -1 以上）になるかどうかの心配は必要ないわけだね！ほうほう．

標準問題 4.3 三角不等式を証明せよ．
$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||$

解答: $(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2=(||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||)^2-||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2$
$=||\boldsymbol{x}||^2+2||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||+||\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}||^2-2\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-||\boldsymbol{y}||^2$
$=2||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||-2\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ シュワルツの不等式より $||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}|| \geq |\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,| \geq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
なので，$2||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||-2\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0$
従って，
$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 \leq (||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||)^2$
正の平方根をとって
$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||$

A— $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2$ の計算は，やっぱり $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ を展開する，ということなのかな．
S— そうみたいだね．まぁでも，公式 4.10 とはそう変わらないよ．
A— あとはシュワルツの不等式を使えば，大体もとまるね．
B— シュワルツの証明のところでも気になったんだけど,「正の平方根をとって」って断るのはなぜだろう？
S— 平方根といえば正と決まっているからねぇ.「負の平方根」ともいうから，一応区別している感じ？
A— ていうか，$\sqrt{x^2}$っていくつだと思ってる？
B— x を 2 乗してルートだから，x でしょう？
A— ブブーーー！
B— じゃ，何が正解？
A— 絶対値 $|x|$ が正解．高校の教科書にも載ってるよ．
B— そっか．$x \geq 0$ だと分かっていれば $|x|=x$ だというわけだね．
A— ところで，なぜ「三角」なの？
B— あ，それ先生に聞いてきた．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ で三角形が書けるんだって．ホントに書ける？
A— ああ，まあ書けるね，だから三角？
B— そういうことみたいだよ．
S— 違うだろう,「三角形の 2 辺の和はもう 1 辺よりも長い」という意味だと思うよ．
A— 遠回りするよりまっすぐ行ったほうが近いということか．

4.2 正規直交基底とシュミットの直交化法

＜予習＞

- 内積の定義を思い出しましょう
- 基底の定義を思い出しましょう

B— 内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ という記号だといわれてるけど，まだ慣れない気がする．$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ のほうがいいよ．

A— 君が「いいよ」といっても教科書はかわらないけどねえ．定義は？

B— $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ だね.

A— そういうこと．基底の定義は？

B— あーもう忘れた．あれは何カ月前のはなしだ？

S— 「一次独立なベクトルの組で，その張る空間になっていればよい.」とかだよね.

B— **イチジドクリツ**とか**ハルクウカン**とか意味不明なんだけど $\cdots$

S— ちゃんと復習しろ！復習！

サク単！定義 4.4 (正規直交基底)　線形空間 V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が
(1) すべてのベクトルの長さが 1 に等しく，かつ
(2) 互いに直交している
とき，**正規直交基底**であるといいます．このことを $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ とも書くこともできます．ただし δ_{ij} は「クロネッカーのデルタ」と呼ばれる式で，$i = j$ ならば $\delta_{ii} = 1$（たとえば $\delta_{22} = 1$）で，$i \neq j$ ならば $\delta_{ij} = 0$（たとえば $\delta_{13} = 0$）であるようなものです.

基本例題 4.5　θ を定数とします．このとき，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は正規直交基底です．実際に，

$||\boldsymbol{e}_1|| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1, ||\boldsymbol{e}_2|| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = 1,$

$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \cos\theta \cdot (-\sin\theta) + \sin\theta \cdot \cos\theta = 0$ です.

B— 正規直交ですか …

A— どうやら,「長さが 1」のことを「正規」と言って,「互いに直交する」ことを「直交」と言っているらしいよ.

B— 長さ 1 なら単位ベクトルなんだから「単位直交基底」のほうが意味がわかりやすいんじゃない？

A— まぁそういうことか．でも用語はかえられないけどね.

C— δ はデルタだよね．クロネッカーってなにそれ？おいしいの？

A— おいしくない．人の名前だとおもうヨ …

B— $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ って**つまりどういうこと**？

S— $i = j$ の場合，たとえば $i = j = 2$ だとすると $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = \delta_{22} = 1$，つまり $||\boldsymbol{e}_2||^2 = 1$ ということだ．これが「長さが 1」の意味合いか...

B— そうみたいだね．$i \neq j$，たとえば $i = 1, j = 3$ のときは？

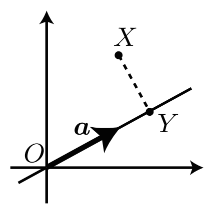
A— オレに聞いてるの？ええと，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \delta_{13} = 0$ だから $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_3$ とは直交している，の意味だな.

C— 「互いに」っていうのは？

S— $i \neq j$ の組み合わせは「$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$」とか「$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_3$」とかいろいろあるけどそれ全部，っていう意味だと思う.

C— そっか.

サク単！定義 4.5 (正射影)　$\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ を考えます．ベクトル $\boldsymbol{a}$ を含むような直線を ℓ とします．任意の $\mathbb{R}^2$ の点 X に対して，X をとおる ℓ の垂線をを考えて，その垂線と ℓ との交点を Y とします.（X が ℓ 上にある場合には，$Y = X$ になります.）$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ から $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{OY}$ を対応させる写像を ℓ への正射影ということにします.



基本例題 4.6　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします．点 $X \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ととって，Y を求めてみましょう．$\boldsymbol{y} = \overrightarrow{OY}$ は $\boldsymbol{a}$ の何倍かですから，$\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ としましょう．図より，$\overrightarrow{XY} \perp \boldsymbol{a}$ ですから，直交を内積の式に書き直して $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$ です.

$\left(\begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=0 \longrightarrow (2t-3)\cdot 2+(t-4)\cdot 1=0 \ \to\ 5t=10\ \to$

$t=2$. したがって $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ と求まりました．

サク単！公式 4.5 (正射影)　(1)　$\boldsymbol{y}=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$

(2) $\left(\boldsymbol{x}-\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right)\perp\boldsymbol{a}$

標準演習 4.3　この公式を証明してみましょう．

A— (1) はベクトル方程式とかで，高校でも習った気がする．上の計算で，$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=0$ をそのまま計算していけばいいんだよ．

B— $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=0$ でしょ，で，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})$ と変形しておくのかな．

S— あと，$\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{a}$ を代入して，$t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})$ でしょう．で，$t=\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ だな．

B— (2) はどういうことなの？

A— 正射影したものを引くと，$\boldsymbol{a}$ と直交するってこと？

S— ああ，つまり，上の図では $\overrightarrow{YX}$ を求めている，ってことだな．$\boldsymbol{a}$ と直交してあたりまえっていうか．

サク単！定義 4.6 (シュミットの直交化法)　一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が与えられたとき，これから下に述べる手順で正規直交なベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を得ることができます．これを**シュミットの直交化法**といいます．また，任意の基底からシュミットの直交化法によって，正規直交基底が得られます．教科書によっては**グラム・シュミットの直交化法**と呼びます．

（第１手順）　$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{x}_1$

（第２手順）　$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{x}_2-\dfrac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{a}_1$

（第３手順） $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{a}_2)}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)}\boldsymbol{a}_2$

以下，この作業を繰り返します．

（第 n 手順） $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{x}_n - \dfrac{(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}_2)}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}_{n-1})}{(\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1})}\boldsymbol{a}_{n-1}$

（最終手順） 最後に長さを１にします．すなわち

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}, \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \dfrac{\boldsymbol{a}_n}{||\boldsymbol{a}_n||}$ とします．

基本例題 4.7 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ としましょう．手順に従って求めていきます．

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \frac{11}{5} \cdot 1 \\ 4 - \frac{11}{5} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2}}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

基本演習 4.4 上の計算を検算して，正規直交基底であることを確認してください．

A— 公式 4.22(2) のように，正射影したものを繰り返し引き算する，とおもえば少しは何をしているかが分かる気がする．

S— まぁ言われたとおりに計算するんだな．

B— これって，一次独立でないもので始めるとどうなるのかな …

A— たぶん，0 が出てくるんじゃないかな．それより，基底から始めれば出来上がったもの基底になる，っていう保証はあるのかな？

S— たぶん …… 証明が必要なんだろうけどね．先生に聞きに行かないとね．あ，でも，それよりも，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ って正規直交基底なの？確認した？

A— してない ⋯. 直交してる感じするけど.

基礎問題 4.4　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．点 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ から $\boldsymbol{a}$ への正射影を求めよ.

解答:　　公式により

$$\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{9}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

B— 公式があるとひどく簡単だな.

A— その分，シュミットの直交化は大変らしいよ ⋯

基礎問題 4.5　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を正規直交化せよ

解答:　　手順に従って計算する.

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3}{1^2 + 2^2 + 3^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{a}_1 - \frac{(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{a}_2)}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)}\boldsymbol{a}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4\cdot 1 - 3\cdot 2 + 1\cdot 3}{1^2+2^2+3^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) - 3\cdot\left(-\frac{11}{7}\right) + 1\cdot\left(\frac{8}{7}\right)}{\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{8}{7}\right)^2}\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - \frac{1}{14}\cdot 1 - \frac{11}{63}\cdot(-2) \\ -3 - \frac{1}{14}\cdot 2 - \frac{11}{63}\cdot(-11) \\ 1 - \frac{1}{14}\cdot 3 - \frac{11}{63}\cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{11}{18}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 長さを 1 にして,}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(-11)^2+8^2}}\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{21}}\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{7^2+(-2)^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A— あれ？ ？ ？ 最後の計算，あれでいいの？

S— うん，僕も変だと思って先生に聞いてきた．あれでいいんだって．

A— どうして？ ？

S— 最後に「長さを 1 にする」から，それ以前に定数倍してしまっても答えは変わらないんだって．だから，$\boldsymbol{a}_2$ を $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$ で計算しても $\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$ で計算しても結局同じなんだって．

A— 計算ミスを減らすための工夫というわけか．なるほど．

B— ねえ，こういうのって有理化しないでいいのかな．有理化しないと減点される，って聞いたことあるんだけど．

A— 先生によると,「担当教員にもよりますけど，基本的には有理化してもしなくてもどちらでも正しいはずです.」って言ってたから，いいみたいだよ．ただし，設問に「有理化しなさい」と書いてあったらしたほうがいいってさ．

B— へぇ，その程度なんだ．

発展問題 4.6 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であるとする．任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3$ となる s, t, u を求めよ．

解答: $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x})$ を計算すると，

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_1, s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2 + u\boldsymbol{e}_3) = s(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + t(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + u(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$$
$$= s \cdot 1 + t \cdot 0 + u \cdot 0 = s$$

同じようにして

$$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) = s \cdot 0 + t \cdot 1 + u \cdot 0 = t, (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}) = s \cdot 0 + t \cdot 0 + u \cdot 1 = u$$

が得られる．

（答え）　$s = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}),\ t = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}),\ u = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x})$

S— これって，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ も $\boldsymbol{x}$ も具体的には与えられてないんだよねぇ．それでも答えが求まるんだ．

A— 凄腕の公式，といったところか．

S— 先生によると，フーリエ解析を勉強すると，こういう話が出てきます，って言ってたよ．

B— 凄腕な上に応用もあるということか．

4.3　等長性と直交行列

＜予習＞

- 念のため行列の積を復習しておきましょう
- 転置行列を復習しましょう
- 内積とノルムを復習しましょう

— 念のため，だって

— 僕ら，全然信用がないんだね.

— ま，テストであの点数じゃぁなあ ⋯⋯

— ⋯⋯⋯⋯

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ ということだよ.

— 転置行列は「列と行を交換する」行列だよね.

— ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ だな．次は？内積だけど ⋯

— $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 3 + 8 = 11$ とか.

— うん．ノルムは $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 1^2 + 2^2 = 5$ みたいに計算すればよいと.

— ルートがないよ！

— $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ だ！

— これで少しは信用してもらえるだろうか ⋯⋯

— ダメだろう ⋯⋯

サク単！定義 4.7 (直交行列)　正方行列 A が ${}^tAA = A\,{}^tA = I$ を満たすとき，A を直交行列といいます.

基本例題 4.8 原点中心の回転を表す行列 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ は直交行列です．実際に，

$A\ {}^{t}\!A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が成り立ちます．

基本演習 4.5 検算してください．

標準例題 4.9 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{3\sqrt{21}} & \frac{7}{3\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{11}{3\sqrt{21}} & -\frac{2}{3\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{8}{3\sqrt{21}} & -\frac{1}{3\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ は直交行列です．実際に

$${}^{t}\!AA=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}}\\ -\frac{2}{3\sqrt{21}} & -\frac{11}{3\sqrt{21}} & \frac{8}{3\sqrt{21}}\\ \frac{7}{3\sqrt{6}} & -\frac{2}{3\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{3\sqrt{21}} & \frac{7}{3\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{11}{3\sqrt{21}} & -\frac{2}{3\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{8}{3\sqrt{21}} & -\frac{1}{3\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ が成り立ちます．

標準演習 4.6 検算してください．(闇雲に検算するのではなく，何かを見つけてください．)

— 検算した？
— これからする …… テストまでには，きっとする ……
— 何かを見つけて，っていわれても数学の法則を見つけるのは期待しないでほしいなぁ
— 「何か」ってそういうことじゃないんじゃない？例にしてはなんだか数が妙に複雑じゃない？
— ていうか，これって問題 4.28 の答えに出てくる数字を並べたものでしょう？
— え！
— あ，ホントだ．
— そういうことだと思うよ

— シュミットの直交化法と関係がある，っていいたいのかな，それとも正規直交基底と関係がある，っていいたいのかな．

— まぁ，どちらかだろうねえ．

サク単！定義 4.8 (等長的，内積を保存する行列)　正方行列 A を考えます．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$$

が成り立つとき，A は等長的な行列であるといいます．
任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つとき，A は内積を保存する行列であるといいます．

標準例題 4.10　図形的に考えて，回転移動・線対称移動はベクトルの長さを変えないので等長的な行列であることが予想されます．実際に，回転移動で確認してみると，

$$||A\boldsymbol{x}|| = \left|\left|\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\right|\right| = \left|\left|\begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}\right|\right|$$

$$= (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 = \left|\left|\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\right|\right| = ||\boldsymbol{x}||$$

標準演習 4.7　検算してください．

— 回転移動をしてもベクトルの長さが変わらないことは，直感的にはそうかあーと思うけど，計算で確かめることもできるんだね．

— ベクトルの長さを変えない，ということなら平行移動はどうなの？

— 平行移動は線形写像でないからダメ？とかいうんじゃない？

— ダメ，というより，この場合には話題の外，という感じだろうな．

> **サク単！公式 4.6 (直交行列の基本性質)** (1) A が直交写像，(2) A が等長的，(3) A は内積を保存する，の 3 つの条件は互いに必要十分条件です．

補足 4.2 証明は，阿原一志著「大学数学の証明問題，発見へのプロセス第 12 話」を見てください．

— この本を調べてみてもいいけど，本買う金が惜しい．
— この丸投げ的体質に反感おぼえるしな．
— なんか，でも $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ だとしたら，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を代入して，$||A\boldsymbol{x}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2$ になる，とかそういう話でしょ？
— おお，アタマいいな．そういうことか．必要十分っていってるけど，逆は？
— それはムツカしい．先生に聞いてこよう．
(後日)
— 余弦定理使うんだって．公式 4.10 か．
— $||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$ だとすると，$||A\boldsymbol{a}|| = ||\boldsymbol{a}||, ||A\boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{b}||, ||A(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|| = ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||$ は言える．
— 余弦定理を並べてみるか．
$||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$||A(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})||^2 = ||A\boldsymbol{a}||^2 + ||A\boldsymbol{b}||^2 - 2(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})$ だな．
— だいたい同じじゃない．違うところはどこだよ．
— あーつまり，$2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})$っていうことですか．
— で終わり．
— 何が終わり？
— だって内積を保存する式が出たでしょう？
— あれ？ あ？ そうか．でたでた．…… へえ〜〜．
— おまえ，時間差で感心するなよ．
— 内積を保存する式を見たときから，公式 4.12$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$ が気になってたんだけど．
— そっか．この公式使うと，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ は $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tAA\boldsymbol{y})$って書けるな．
— A が直交行列なら ${}^tAA = I$ を満たすわけだから，この式は「内積を保存する式」なわけだ．
— 逆は？
— なんとなくだけど，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tAA\boldsymbol{y})$ がいつでも成り立つなら，${}^tAA = I$ である，とか言えちゃうんじゃないかなぁ．

— あーそういう感じするね．でもそういう公式知らないけど．
— きっとそういう公式あるよ．先生に聞いてみよう．

基礎問題 4.7 行列 $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & -b & b \\ c & -c & d \end{pmatrix}$ が直交行列になるように a, b, c, d の値を定めよ．ただし，$a > 0, b > 0, c > 0$ であるとする．

解答: $A\,{}^tA = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & -b & b \\ c & -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & -c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，

a に関するところをみると，
$a^2 + a^2 = 1$（$(1,1)$ 成分）より，$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ だが，$a > 0$ より $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である．
b に関するところをみると，
$b^2 + (-b)^2 + b^2 = 1$（$(2,2)$ 成分）より，$b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ だが，$b > 0$ より $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
$(2,3)$ 成分を比較して $bc + (-b)(-c) + bd = 0$，$(3,3)$ 成分を比較して $c^2 + (-c)^2 + d^2 = 1$ であるが，$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ と $c > 0$ に注意しながら解けば $c = \frac{1}{\sqrt{6}}, d = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ である．

$\boxed{{}^|\forall{}^|}$

— 一度式を立ててしまえば，あとは丁寧に解いていけば大丈夫そうだな．
— ねえこれって，${}^tAA = I$ のほうで式を立てるのはだめなの？
— 別にダメということはないとおもうけど，やってみた？
— やってみたけど，ワケわからない式がたくさん出てきて挫折した．
— じゃあ，筋が悪かったんだよ．
— それだけ？
— それ以外に何か？
— これだから，デキる人って嫌われるんだよ．

標準問題 4.8 2 次の直交行列は回転と線対称に限ることを示せ

解答: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列であるとする．$A\,{}^tA = I$ より，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}.$$

$a^2+b^2=1$ より $a=\cos\theta, b=\sin\theta$ とできる．
$c^2+d^2=1$ より $c=\cos\varphi, d=\sin\varphi$ とできる．
これを $ac+bd=0$ に代入すると，

$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=0 \ \longrightarrow\ \cos(\theta-\varphi)=0 \ \longrightarrow\ \varphi=\theta\pm\frac{\pi}{2}$

これを代入して，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ である．前者は回転，後者は線対称である． $\boxed{|_{\forall}|}$

— $a^2+b^2=1$ より $a=\cos\theta, b=\sin\theta$ とできる．というのはなぜ？
— 点 (a,b) が単位円上にあるから？とかいうんじゃないのかな．
— ああ，そういうことですか．じゃあ，c,d のほうも同じことだね．
— なんだか，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$ とかそういうのをナニゲに使ってる？
— 使ってるねぇ．こういう公式は覚えておかないといけないんだねぇ．
— すっかり忘れてた．でもまたスグ忘れると思う．
— コラ．
— ところで，2 つ目のは線対称ってどういうこと？
— 問題 3.89 にでてきた形だね．この問題文中では $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ の形だけど，2θ を θ に置きなおせば $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ だね．

発展問題 4.9 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることと，これらを横に並べた正方行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ が直交行列であることは必要十分条件であることを示せ.

解答: $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ とおくと，${}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_1 \\ {}^t\boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ である.

${}^tAA$ の (i,j) 成分は ${}^t\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ なので,
${}^tAA = I$
$\Leftrightarrow$ ${}^tAA$ の (i,j) 成分は δ_{ij}
$\Leftrightarrow (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底
以上で示された. $\boxed{{}^{\shortmid}\forall{}^{\shortmid}}$

— 「${}^tAA$ の (i,j) 成分は ${}^t\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$」というところがよくわからない.
— うん．わからない．実例で考えてみるか.
— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ を列に区切るわけだな.
— まて，この A は直交行列じゃないだろう，いいのか？
— いいかどうかわからんけど，ともかくまず分かりやすい例でやってみよう.
— $A = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$ とすると，${}^tA = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$ だな.
— じゃあ ${}^tAA = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$ の $(1,3)$ 成分はどうだ？
— ははあ，$(1,3)$ 成分は $1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 9 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$ だ！ 確かになってるねぇ.
— うまくいってるのか．はぁ.
— 今気づいたけど，単位行列 I の (i,j) 成分ってクロネッカーさんのデルタなんだ.
— 数学の通称に「さん」づけいらないって.

4.4 外積と平行６面体の体積

＜予習＞

- 空間ベクトルの内積を思い出しておきましょう

— 空間ベクトルの内積ということだったら $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right) = 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6 =$ 32 みたいなののことだよね.

— ホントいっつもこの例だけどね.

サク単！定義 4.9 (外積) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ に対して,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}bc'-b'c\\ca'-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}$$

と定義し，これを空間ベクトルの**外積**と呼びます．教科書によっては**クロス積**と呼ぶこともあります.

基本例題 4.11 外積は空間ベクトルの集合 $\mathbb{R}^3$ についてだけ定義されます.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot6-5\cdot3\\3\cdot4-6\cdot1\\1\cdot5-4\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

サク単！公式 4.7 (外積の直交性) $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.（ただし，0 ベクトルのときも「垂直」であると考えます.）

基本例題 4.12 $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right) = -3 + 12 - 9 = 0$

— ほんとだー．ちょっと不思議な？ 感じ？

— $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を計算してみればいいんじゃない？

— $a(bc' - b'c) + b(ca' - c'a) + c(ab' - a'b)$ だけど，これ 0 かな？

— あーきれいに消えてるね．なんだかこれが消える，というほうがよっぽど不思議な気がする．

サク単！公式 4.8 (外積の性質（線形性・交代性）)

(1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

(2) $t(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (t\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (t\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(1)(2) をあわせて多重線形性，(3) を交代性といいます．

基本例題 4.13 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4+7\\5+8\\6+9\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}2\cdot(6+9) - (5+8)\cdot 3\\3\cdot(4+7) - (6+9)\cdot 1\\1\cdot(5+8) - (4+7)\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 6 - 5\cdot 3\\3\cdot 4 - 6\cdot 1\\1\cdot 5 - 4\cdot 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\cdot 9 - 8\cdot 3\\3\cdot 7 - 9\cdot 1\\1\cdot 8 - 7\cdot 2\end{pmatrix}$$

(2) $\left(2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 2\cdot 6 - 5\cdot 2\cdot 3\\2\cdot 3\cdot 4 - 6\cdot 2\cdot 1\\2\cdot 1\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 2\end{pmatrix}$

$$2\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)=2\cdot\begin{pmatrix}2\cdot6-5\cdot3\\3\cdot4-6\cdot1\\1\cdot5-4\cdot2\end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot3-2\cdot6\\6\cdot1-3\cdot4\\4\cdot2-1\cdot5\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

基本演習 4.8 上の計算で公式が成り立っていることを検算してください.

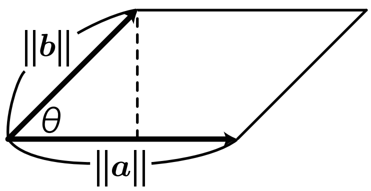
— まあ,「積」って名前がついているんだから，分配法則とかは成り立ってほしいよね.
— 定数倍との相性もよさそうだし.
— あ，そういえば，(3) をみて思ったんだけど，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ だよね？
— どうしてどうして？
— あんまり自信ないけど，(3) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ とすると，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$ となるから？
— ああ，なるほど，証明できてるんじゃない？すごいすごい.
— やたっ！

サク単！公式 4.9 (ベクトルの作る平行四辺形の面積の公式) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が平行でなく，かつ $\boldsymbol{o}$ でないとする．ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする（$0\leq\theta\leq\pi$）とき，この 2 つのベクトル作る平行四辺形の面積 S は $S=||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\sin\theta=\sqrt{||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$ です.

補足 4.3 図において，平行四辺形の底辺の長さは $||\boldsymbol{a}||$ であり，高さは $||\boldsymbol{b}||\sin\theta$ である.

このことから $S=||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\sin\theta$ である．また，公式 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}S&=||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\sin\theta\\&=||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2-||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2\cos^2\theta}\\&=\sqrt{||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}\end{aligned}$$



— 高校の教科書で読んだような気もする.
— これ,「面積が正」というのをナニゲに使っているよね.

— 平方根だから，まぁ正になるよね．

サク単！公式 4.10 (外積の大きさ)　$||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しくなります．

標準演習 4.9　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ とおいて，上の公式を証明してみてください．

— 例で勘弁してもらおうよ．$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ くらいでさ．

— 僕たち，ホントこの例好きだよね。この例でしか成り立たない計算とかにハマったりしないのかな．

— さあね．じゃぁいくよ．問題 4.11 より，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=32$, $||\boldsymbol{a}||^2\cdot||\boldsymbol{b}||^2=(1^2+2^2+3^2)(4^2+5^2+6^2)=14\cdot77$ よって $S=\sqrt{14\cdot77-32^2}=\sqrt{54}=2\sqrt{6}$ だね．

— それで，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}12-15\\12-6\\5-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ だから $||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||=\left\|\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=2\sqrt{6}$

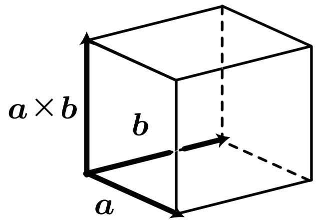
— !!! すげーーー！ネ申だ！

— だれがやってもなると思うけどね．

サク単！公式 4.11 (外積の向き)　3つの空間ベクトルを並べて書いたとき，これらが右手系であるとは,「右手の親指・人差し指・中指の作る形と同じ方向になる向きである」ことと定義します．x 軸，y 軸，z 軸がこの順で右手系ならば，平行でない任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はこの順で右手系になります．

基本例題 4.14

通常の挿絵では「x 軸，y 軸，z 軸がこの順で右手系」であるように書くのが普通ですので，外積の向きは右の図のようになると考えればよいのです．これが右手系の位置関係です．



基本演習 4.10　上の図において，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の位置関係が逆になっていたら，その外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は下向きのベクトルになっていることを確認しましょう．

— 右手系ってフレミングの法則だっけ？

— フレミングはふつう左手の法則だろう．左手の親指，人差指，中指の向きになっているときに左手の法則って言うよね．外積は右手の法則なんだね．

— 「x 軸，y 軸，z 軸がこの順で右手系ならば」ってどういうこと？

— もし x 軸，y 軸，z 軸がこの順で**左手系**だとしたら，結論が変わる，という意味だろう？

— x 軸，y 軸，z 軸が右手系でも左手系でも，あんまり違いが分からないんだけど．

— いや，実際，たいして違いはないと思うけれど，外積の向きは x 軸，y 軸，z 軸が右手系か左手系かに依存している，ということなんだろう．

— $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$っていう公式があったからね，順番が重要だということはよくわかったよ．

標準問題 4.10　平面上に異なる 3 点 P, Q, R があるとする．ベクトル $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ を考えたとき，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ から見てベクトル $\overrightarrow{QR}$ が「右折」しているか「左折」しているかを区別する方法を考えよ．

解答:　$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ であるとしよう．いまこれらのベクトルが空間の xy 平面上にあると想像してみよう．すなわち $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ であると仮定するのである．ここで，これらの外積を考えてみると，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ から見てベクトル $\overrightarrow{QR}$ が「左折」しているということは $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ が例 4.54 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

の位置にあることになり，外積 $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}$ は上を向く．逆に，右折しているならば外積は下を向く．

一方で，計算により，

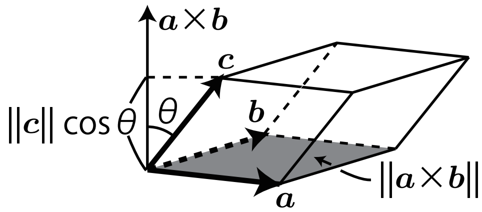
$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix}$$

であることから,「左折 $\Leftrightarrow ad - bc > 0$」「右折 $\Leftrightarrow ad - bc < 0$」であることが分かる． $\boxed{\forall}$

— へえ〜．外積をつかうと，平面上の右折左折の区別がつくのか＝
— これは応用らしい応用だね．
— これも，x 軸，y 軸，z 軸が右手系，ということを仮定しているよね．
— そういうことになるかな．

標準問題 4.11　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が互いに平行でなく，かつ $\boldsymbol{o}$ でないとする．このとき，平行 6 面体の体積 V は $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ である．

解答:　平行 6 面体の体積は（底面積）×（高さ）である．



$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形を底面としよう．すると，底面積は公式＊＊により $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||$ である．ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は底面に直交していることに注意すると，平行 6 面体の高さは $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に関する $\boldsymbol{c}$ の正射影の長さである．ここで，公式 4.68 の図を見ると，正射影の長さは「$\boldsymbol{c}$ の長さ」と「$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角 θ のコサイン (cos)」であることがわかる．以上より，

（平行 6 面体の体積）＝（底面積）×（高さ）

$= ||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| \cdot (||\boldsymbol{c}|| \cdot |\cos\theta|) = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$

である． $\boxed{\forall}$

— へえ，これは幾何学的な解法だねぇ.
— 図を見れば大丈夫そうなのだけれど …
— 角度 θ がきちんと決まるのかなぁ．そういう心配は必要ないのかな.
— 上の絵で $\boldsymbol{c}$ が下を向いていたらどうなるのかな.
— そうしたら θ は直角より大きくなって，$\cos\theta$ がマイナスになるね.
— でも $\cos\theta$ に絶対値がついているし，体積ということで正の値をとるようになっているんじゃないかな？
— じゃあいいってことか.

標準問題 4.12 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ とすると，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ である.

解答:
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \left(\begin{pmatrix} bc' - b'c \\ ca' - c'a \\ ab' - a'b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \right)$$
$$= (bc' - b'c)a'' + (ca' - c'a)b'' + (ab' - a'b)c''$$
$$= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$
$\boxed{|\forall|}$

— ぎゃーー　サラスの公式だぁ！
— ここでつながるってか.
— こんな壮大なオチは初めて聞いた．１年がかりだぞ.
— ……… あー！！！
— なに，急に叫んだりして.
— そういえば，$\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を示すときに，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を計算して，0 になるなぁ，すげぇなぁ，って言ってたでしょう ….
— は！そうか！ 行列式で同じ列があれば 0！
— 平行 6 面体の体積が 0！
— どうしてこんなにあちこちがつながってるんだ〜〜〜
— フォースと共にあれ …… だな（笑）

第 5 章

固有値・対角化

5.1 固有値，固有空間

＜予習＞

- 連立方程式が不定解を持つための条件を思い出そう．
- 連立方程式の不定解の求め方を思い出そう．

— 不定解を持つためには … なんだっけ？
— 解の次元＋ rank$A = n$ とかいう公式もあったぞ．
— それ以前に A ってなんだよ．rank ってなんだよ．
— えっと ……
— 連立方程式の係数を並べた行列を A として ‥
— それが係数行列だな．
— で，行の基本変形と列の交換で（だったっけ？）連立方程式の標準形へ変形する．
— で，右側に残ったところがパラメータになる．
— $\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & * & \cdots & * & \text{右} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & \text{辺} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & \multicolumn{3}{c|}{O} & ? \end{array}\right)$ だな．
— で，$*$ のところがあれば不定解，なければ一意解？
— そうそう．
— ちなみに，rank はこの標準形の 0 でない行の数だった … よね？
— そうそう …… たぶん．

サク単！定義 5.1 (固有値，固有空間，固有ベクトル) 正方行列 A に対して，$\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ と実数（または複素数）α に対して，

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$$

が満たされるとき，α を A の固有値，$\boldsymbol{v}$ を（固有値 α に関する）固有ベクトルであるといいます．また，行列 A の固有値 α に対して，

$$W_\alpha = \{\boldsymbol{v} \mid A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}\}$$

を（固有値 α に関する）固有空間といいます．

基本例題 5.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と実数 $\alpha = -1$ に対して，

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つので，$\alpha = -1$ は A の固有値であって，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に関する固有ベクトルであるということになります．一般的に，$\boldsymbol{o}$ は固有ベクトルであるとは言いません．

基本演習 5.1 上の例の $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルになっています．そのときの固有値を求めてください．

参考 5.1 固有空間は線形空間です．固有ベクトルを与えよ，と問われたときには固有空間の基底を求めるのが普通です．また，実行列であっても，固有値・固有ベクトルを複素数の範囲で求めます．

サク単！定義 5.2 (特性方程式) 行列 A に対して，**特性方程式**を

$$|xI - A| = 0$$

により定めます．多くの教科書ではこの左辺を $\Phi_A(x) = |xI - A|$ と書いて，**特性多項式**と呼びます．

サク単！公式 5.1 (固有値の求め方) 特性方程式の解は固有値です．

基本例題 5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$xI - A = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix}$$ ですから，

$$\Phi_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 - (-2)(-2)$$

$= x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$ を解いて，
$x = -1, 3$ が固有値です．

基本例題 5.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$xI - A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 1 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$$ より，

$$\Phi_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 1 & x-1 & -2 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$= (x-1)^3 - (x-1)(-2)(-1) - 2\cdot 1\cdot (x-1) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
$= (x-1)(x-3)(x+1) = 0$ を解いて，
$x = -1, 1, 3$ が固有値です．

基本演習 5.2 上の 2 つの例を検算してください．

— 特性方程式は n 次正方行列なら n 次式！
— そういうことかな．まぁ計算してみればそういうことになりそうだね．
— だったら，3 次以上だったらフツウには解けないじゃない．
— あー，そこは大丈夫みたいだよ．
— 何が大丈夫なの？
— テストに出す行列の特性方程式は**絶対に**因数分解できるものしか出ないってさ．
— それって，誰が保障するの？
— うーーん，全国の大学の線形代数の先生？ ホントかな（笑）

サク単！公式 5.2 (**固有ベクトルによる対角化**) 特性方程式によりすべての固有ベクトルを求めた後に，**すべての固有空間の基底**を求めましょう．それら（基底の列ベクトル）を横に並べて正方行列 P が作れるとき，$P^{-1}AP$ は固有値を順に並べたような対角行列になります．このような P を見つけられるとき，行列 A は**対角化可能である**といいます．この P を**変換行列**とよび，A は P **により対角化される**といいます．

基本例題 5.4 $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\Phi_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-8 & 10 \\ -3 & x+3 \end{vmatrix}$
$= (x-8)(x+3) + 30 = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$
固有値は $2, 3$ なので，固有空間 W_2 と W_3 を求めます．
$W_2 = \{\boldsymbol{v} | A\boldsymbol{v} = 2 \cdot \boldsymbol{v}\}$ $W_3 = \{\boldsymbol{v} | A\boldsymbol{v} = 3 \cdot \boldsymbol{v}\}$ です．
W_2 を求めるには，$A\boldsymbol{v} = 2 \cdot \boldsymbol{v}$，つまり $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の解を求めればよいことになります．$\begin{cases} 8x - 10y = 2x \\ 3x - 3y = 2y \end{cases}$ を解いて (中略)，$\begin{cases} x = \frac{5}{3}s \\ y = s \end{cases}$ を得ます．よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が W_2 の基底です．

同じように計算して，$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が W_3 の基底です． (*)

基底のベクトルをすべて並べると $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となり，正方行列になりますので，A は対角化可能で，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となります.（この対角成分の $2, 3$ は固有値を順に並べたものです.）

— えっ？ えっ？ えっ？ えっ？ えっ？ ナニやってるかわからない.

— まず，$|xI - A| = 0$ を解く．

— それが $(x-2)(x-3) = 0$ か．公式 5.1（特性方程式の解は固有値）から固有値は $2, 3$ だというんだね．

— それぞれの固有値について固有空間を求めたのが，W_2 がどうの，W_3 がどうの，というあたりだね．で，W_2 と W_3 のそれぞれの基底が求める．これは方程式を立てて，あとは連立方程式の解法を用いて不定解を出しているわけか．この方程式，右辺にも x, y があるから要注意だな．うん．(*) まではいいことにしよう．

— このあたりから，意味が分からなくなるよ．(*) で基底が求まった後，それを並べたものを $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置く．これは 2 行 2 列だからまぁ正方行列だね．

— で，この先が分からないよ．まず，P^{-1} とかいっちゃっていいの？逆行列があるための条件とかいらないのかなあ，というのがまず疑問．

— それもそうだけど，いきなり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は納得できないよ．

— おい，ちょっと先生呼んで来い！

— おまえ，何様だよ．

— 王様に決まってるだろう！

(後日)

先生：おお，みんな，いい質問ですね！

— そんなことといってごまかされません！

先生：確かに 1 つごまかしました．すべての固有値について固有空間の基底を求めましたね．上の例の (*) のところですね．こうやって求めたベクトル（たち）は一次独立だ，という数学の定理があるのです．このあとの問題のところで，もう 2 つ例がありますが，どちらの場合も一次独立になっています．2 つの一次独立な平面ベクトルを並べると正則行列になる，というのは公式 3.7（基底を並べて正方行列を作ると正則（＝逆行列を持つ）になる）の応用です．3 つの一次独立な空間ベクトルを並べてもやはり正則になりますので，P^{-1} はあるとしていいんですね．

— ･･･・ おまえ，納得した？

— 先生に説明されちゃうとなんか正しそうな気がするんだよな〜〜こう，威圧感？というようなもので．

— う〜〜ん．ともかく,「一次独立」というところは数学の定理で言えていることで，僕たちはそのことはわかっていなかった，ということは認めよう．で？ で？「基底を並べると正則」というのがあるんですか．まぁあったような〜．

— まぁ，僕たちが心配しなくてもいつでも正しいならいいや．そっか．で，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のほうは？これは検算してみろってことでしょ？

先生： 検算の必要はありません．

— えええ～！ だってもし合っていなかったらまずいでしょう．いくらなんでも．

先生： 「公式」だから，P さえ取れればいつでもこうなります．

— もっかい！えええええ～！ その自信はどこからくるんですか？

先生： 標準問題 3.7 ですね．この問題では，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が固有ベクトルであって，かつ基底であれば，$P^{-1}AP$ が対角行列になることを主張しています．

— 何度でも！ええええええ～！ すでにやっていたんですか．

— というか，そこまで想定して，標準問題 3.7 を出題していたというところがスゴイ．こっちが質問に来る，というところまでが「想定内の読み筋」か．

— ちゃんと復習しておきます．先生．

標準例題 5.5 （対角化できない行列）$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$

$\Phi_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+4 & -4 \\ 9 & x-8 \end{vmatrix}$

$= (x+4)(x-8) - (-4)\cdot 9 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$

固有値は重解で 2 です．W_2 を求めるには $A\boldsymbol{v} = 2\cdot\boldsymbol{v}$ を解きます．

$\begin{cases} -4x + 4y = 2x \\ -9x + 8y = 2y \end{cases}$ を解いて $\begin{cases} x = \frac{2}{3}s \\ y = s \end{cases}$ つまり，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であって，W_2 の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ です．そうすると，固有空間の基底は全部で 1 個しかないので，正方行列 P を作れません．このときには対角化可能ではないことになります．（対角化可能ではないことには証明が必要ですが，その証明は難しいので扱いません．）

— こんどは予防線張ってきた ……

— う～～～～～～～～ん．

— ナニ悩んでるの？

— 証明を勉強するために数学科に入りなおそうかなぁとちょっとだけ考えた．

— ホント？すげー．

— ほんのちょっとだけ.

基礎問題 5.1 $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 12 & -9 & 4 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. A は対角化可能か答えよ.

解答: $|xI - A| = \begin{vmatrix} x-11 & 8 & -4 \\ -12 & x+9 & -4 \\ 6 & -4 & x+3 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 - x - 1$
$= (x-1)(x+1)^2$ であるので，固有値は 1 と -1（2 重解）である.
固有値 1 の固有空間 W_1 を求めると，
$\begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 12 & -9 & 4 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を解いて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.
また 固有値 -1 の固有空間 W_{-1} を求めると，
$\begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 12 & -9 & 4 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を解いて，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．以上より，$P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり，対角化可能である.

固有値 1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

である，という答え方も一般的である. |∀|

— やり方としては既に出てきた方法だな．固有空間を求めるところでは，結局連立方程式の不定解を求めなければダメなようだ.

— さらっとかいてあるけど，固有値を求めるところも固有空間を求めるところもけっ

こう重い計算だな．

— そういうのがテストに向いているのだろうね．

基礎問題 5.2 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 4 & -1 & -4\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．A を対角化できるか．

解答: $|xI-A|=\begin{vmatrix}x-3 & 0 & 4\\ -4 & x+1 & 4\\ -2 & 1 & x+1\end{vmatrix}$

$=(x-1)(x+1)^2$ であるので，固有値は 1 と -1（2 重解）である．

固有値 1 の固有空間 W_1 を求めると，

$\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ 12 & -9 & 4\\ -6 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ を解いて，$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ である．

また 固有値 -1 の固有空間 W_{-1} を求めると，

$\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\ 12 & -9 & 4\\ -6 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ を解いて，$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ である．

以上より，固有空間の基底のベクトルは 2 しかないので，この場合には対角化可能ではない．

|∀|

— あ〜もう，連立方程式を一生分解いた気がする．

— 右に同じ ……

— 固有空間の基底のベクトルの個数が足りないと，**対角化可能でない**ということね．

— 標準例題 5.5 と同じ現象だな．

— なんとなく気づいたけれど，固有値のほうで重解がでると，その固有空間の基底のベクトルの個数がどうなるか，というところがポイントのような気がする．

— あ，それはボクも思った．たぶん，固有値に重解がなければ，対角化はいつでもできるんだろうなぁって思ったよ．

— 先生が言ってた「固有空間の基底のベクトルたちは一次独立」という数学の定理が

あるから,「対角化可能」とだけはわかりそうだね．でも結局固有ベクトルを求める計算はしなければいけないけどね.

標準問題 5.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{100}$ を求めよ.

解答: 細かい計算は省略するので，各自研究されたい．基本例題 5.2 で計算したように，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, 3$ である．固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，固有値 3 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である．この式の両辺を 100 乗すると

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

P と P^{-1} が並んでいるところは消せるので,

$$P^{-1}A^{100}P = \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \text{ よって } A^{100} = P\begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{100} + 3^{100} & -(-1)^{100} + 3^{100} \\ -(-1)^{100} + 3^{100} & (-1)^{100} + 3^{100} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 3^{100} & -1 + 3^{100} \\ -1 + 3^{100} & 1 + 3^{100} \end{pmatrix}$$

— 圧倒された ……

5.2　対称行列の対角化と 2 次形式

＜予習＞

- 転置行列・対称行列の定義を思い出そう
- 正規直交基底を思い出そう

S— 転置行列の定義は ⋯⋯

B— 「列と行を取り替えたような行列」だったね.

S— で，対称行列は ⋯⋯

B— そんな昔のことは忘れた ⋯⋯

S— $A = {}^t\!A$ となる行列だな.

B— えっと〜長さが 1 で，お互いに直交する！

A— はい，正規直交基底のことだね.

サク単！公式 5.3 (対称行列の固有値は実数)　（実数を成分とする）対称行列の固有値は実数です.

基本例題 5.6　例 5.7 の $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は対称行列です．その固有値は $-3, 1$ で実数でした．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で考えてみると，$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 5x - 3 = 0$ より固有値は $\dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ であって実数です.

基本演習 5.3　上の例以外で対称行列の固有値を計算してみましょう.

A— おう，いきなり公式か ⋯⋯

B— 結構ナゾな公式だな．固有値って，だいたい実数なんじゃないの？

A— それはたまたまこれまでの例がそうだっただけ．たとえば ⋯⋯

S— $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は固有値複素数だって先生が言ってた.

A— おう，これは？$\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = 0$ だな．おう，固有値は $\pm i$ か．

S— 上記の例以外で，って $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ でやってみればいいんじゃない？

A— $\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -b & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + (ad - b^2) = 0$ だね．

S— これを解いて $x = \dfrac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - b^2)}}{2}$
$= \dfrac{a + d \pm \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2}}{2}$ だな．なってる？ わかる？ルートの中が正ならいいのかな？

A— あああ，なってるね．ルートの中身は $a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2$ でこれはいつでも正だね．つまり固有値は実数だというわけだ．

B— 3 次対称行列でもなるんだろうね．

S— きっとね．先生に聞いておくよ．

（後日）

S— 聞いてきた．複素数の内積を使って証明するから，授業の範囲内ではむつかしいって．

B— そうか．でも実数だっていう事実はあるんだね．

サク単！公式 5.4 (対称行列の固有ベクトルは直交する) A を（実数を成分とする）対称行列として，α, β を異なる固有値，$\boldsymbol{u}$ を α の固有値，$\boldsymbol{v}$ を β の固有値とします．このとき，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ とは直交します．

基本例題 5.7 $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を計算すればこのことはわかります．まずこのままで $A\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}$ を代入すると，$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ です．
公式 4.12$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^tA\boldsymbol{v})$ を使うと，$A = {}^tA$（対称行列である条件）より，$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$ です．この式から計算を始めると $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ です．
以上を比較すると，$\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ですが，$\alpha \neq \beta$ なので，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ となって，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ とは直交します．

S— へえ〜〜対称 $A = {}^tA$ という条件から思いもよらないような結果がでるんだね．

A— まぁ，そういうもんか，と納得しておこう．

サク単！公式 5.5 (対称行列の固有ベクトルは正規直交基底にとれる)
（実数を係数とする）対称行列の固有ベクトルを正規直交基底にとることが出来ます．別の言い方をすると，固有ベクトルを上手に選ぶことにより，P を直交行列にとれて，$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることができます．

標準例題 5.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は $s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルでした．正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ の条件は (1)$||\boldsymbol{e}_1|| = ||\boldsymbol{e}_2|| = 1$, (2) $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$ でした．条件 (1) を満たすためには $\left\|s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = s^2 + (-s)^2 = 1$ より $s = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となりますが，どちらか一方を選べばよいので，いまは固有ベクトルとして $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ととります．もう 1 つの固有ベクトルも同様に計算をして $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととることにします．条件 (2) に関しては $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$ を満たしているので，これでよいことになり，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は直交行列であって，かつ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ が満たされます．

S— まった〜〜〜！

C— 当然マッタかけるよな，これは．なんなんだ？ ツッコミどころ満載！

S— 固有ベクトルが $s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$（固有値 -1）と $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（固有値 3）というのは以前に

計算したからいいや．前は $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ でいい，って言ってたじゃない．

A— それで $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ でもいい，っていうのはなんだかおかしい．

C— そうだそうだ！

S— あと，正規直交基底をつくりたい，という方針はまぁ従うことにして，長さを 1 にすればいい，というのはわかるけれど，ベクトルたちが直交しているかどうか，もし直交していなかったらどうすればいいのか，がわからないよ．今の場合はタマタマ直交していたから何もしなくて助かってるけどねえ．

C— そうだそうだ！ ！ ！

S— あ，まてよ．直交するかどうか，っていうのは上の公式 5.4 でいいのか？

C— あ，そうなんですか？ ？ ？ ？

S— 固有ベクトルのほうも,「どの固有ベクトルでも $P^{-1}AP$ のほうはうまくいく」と言われたような気がしてきた ····（基本例題 5.4，標準問題 3.7）

C— あ，そうなんだ〜〜〜（へらへら）···

A— なんだか急におとなしくなったヤツが 1 人いるな，ここに．

S— いいんじゃない？実害ないし．

A— ところで，正規直交基底のベクトルを並べて作る正方行列は直交行列なの？(だいいち，直交行列ってなんだったっけ？）公式 5.5 ではさも当たり前のように書いてあるけど ·····

S— なんでも，発展問題 4.9 にそういうのがあるらしいよ（直交行列は $A^tA = I$ のことね）．

C— ぷすぷすぷす ····· メモリ容量オーバー ····

サク単！定義 5.3（**2 次曲線**） 平面上の集合で，2 次式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ で表されるものを 2 次曲線といいます．詳細に分類するとさまざまな形がありえますが，主要な形は
(1) 楕円（正円も含む)，(2) 双曲線，(3) 放物線　　です．

基本例題 5.9 (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b$）は長径 $2a$, 短径 $2b$ の楕円です.（焦点は $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$）

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は．焦点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ の双曲線です．

(3) $x^2 - y = 0$ は $(0,0)$ を頂点とし，$x = 0$ を軸とするような放物線です．

サク単！定義 5.4（**2 次曲線の標準形**） 2 次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ の項のうち，クロス項（xy の項，交差項とも言います）を持たない形 $ax^2 + cy^2 + \cdots$ を 2 次曲線の標準形といいます．標準形をみれば，その 2 次曲線がどのような形をしているか（楕円・双曲線・放物線など）を決めることができます．

基本例題 5.10 上の 3 つの例はどれも標準形をしています．一方で，$xy - 1 = 0$ は双曲線ですが，xy という項を含みますので標準形ではありません．

サク単！公式 5.6（**2 次曲線は直交行列で標準形にできる**） 任意の 2 次曲線は，ある直交行列による 1 次変換で標準形にすることができます．このことを別の言い方をすると，任意の 2 次曲線は，等長性を持つ 1 次変換つまり回転や線対称によって標準形に移すことができることになります．

基本例題 5.11 $ax^2 + bxy + cy^2$ の部分をみて $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ を考えます．この行列は実数を成分とする対称行列ですので，ある直交行列 P が存在して，$P^{-1}\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ と対角化することができます．ここで，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ という一次変換を考えましょう．この一次変換により標準形が得られます．(実際に，変数を x', y' に変換すると，$px'^2 + qy'^2$ で始まる標準形の 2 次曲線が得られます.)

たとえば，$xy - 1$ という式を考えてみましょう．$ax^2 + bxy + cy^2$ に当てはめて考えると $a = 0, b = 1, c = 0$ ですから，$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ です．

次に，A の固有値を求めましょう．$|xI-A| = \begin{vmatrix} x & -1/2 \\ -1/2 & x \end{vmatrix} = x^2 - \dfrac{1}{4} = 0$ 固有値は $\pm\dfrac{1}{2}$ です.

次に A の固有ベクトルで長さが 1 のものを求めましょう.（直交行列を求めるときには長さ 1 の固有ベクトルをもとめるのが上手なやり方です.） 複号同順で $\pm\dfrac{1}{2}$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ です．長さを 1 にしますから $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ です.

固有ベクトルを並べて P を作りましょう．上の計算結果より，$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ です．そこで，

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$ という 1 次変換を考えます．これを最初の 2 次曲線の式に代入すると，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 1 = 0 \longrightarrow$
$\dfrac{1}{2}x'^2 - \dfrac{1}{2}y'^2 - 1 = 0$ となり，これは双曲線であることが改めて確認されました.

基本演習 5.4 以上の計算を検算してください．また，双曲線の焦点の位置を求めてください.

A— 反比例のグラフは当然双曲線だと思っていたけれど，これで計算による確認ができたわけだ．なるほど〜〜.

B— ちょっと目からウロコおちた.

S— $\dfrac{1}{2}x'^2 - \dfrac{1}{2}y'^2 - 1 = 0$ は，双曲線の形 $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ と比較すると，$a = b = \sqrt{2}$ だね．だから，焦点の座標は $(x', y') = (\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0) = (\pm 2, 0)$
この式を $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'$ に代入すると，$(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ だね．もちろん複号同順.

A— へえ．そんな風に求まるんだ.

B— 覚えておこう．直交行列＝回転・線対称っていうのは問題 4.8 であったけれど，それがこういうところで利いてくるわけだね.

標準問題 5.4　対称行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ の固有値を求め，直交行列により対角化せよ．

解答:　特性多項式から固有値を求める．$|xI-A|=\begin{vmatrix}x-1&-2&1\\-2&x-1&-1\\1&-1&x+2\end{vmatrix}=$ $x^3-9x=0$ よって，固有値は $-3,0,3$ である．それぞれの固有値についてその固有ベクトル（固有空間）を求めると，順に $s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},u\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．（これらが互いに直交することは公式により保障されている.）長さが1になるように s,t,u を求めると $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．以上より，行列 A は直交行列 $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ によって対角化される．　|∀|

B— ホントだ……

S— 何，感慨にふけってるの？

B— 今のいままで，公式5.4を疑ってたんだけど，本当に，固有ベクトルを計算すると，自然と互いに直交しているんだね〜〜え．

S— そ．

B— そ，って感動うすくない？ 君？

S— だって，数学の定理，ってそういうもんでしょう？

B— だから，デキる人は嫌われるんだよ……

基礎問題 5.5 次の 2 次曲線の標準形を求めよ．
$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y + 1 = 0$

解答: 2 次の部分を $ax^2 + bxy + cy^2$ に当てはめて考えると $a = 5, b = -6, c = 5$ であるので，$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ とする．固有値を求める．$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 3 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x-8) = 0$ より，固有値は $2, 8$ である．

固有値 2 の固有ベクトルは $\begin{cases} 5x - 3y = 2x \\ -3x + 5y = 2y \end{cases}$ を解いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

固有値 8 の固有ベクトルは $\begin{cases} 5x - 3y = 8x \\ -3x + 5y = 8y \end{cases}$ を解いて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

長さを 1 になるように調節してこれらを並べると $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる．

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$ と一次変換すると,（計算中略）

$2x'^2 + 8y'^2 - 2\sqrt{2}x' + 8\sqrt{2}y' + 1 = 0$ が標準形である．ちなみにこの式は，$\dfrac{(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{(y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ であって，中心 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で長径 $2\sqrt{2}$，短径 $\sqrt{2}$ の楕円である．x, y に戻すと，中心が $(1, 0)$ であるような，長径 $2\sqrt{2}$（偏角 $\frac{\pi}{4}$），短径 $\sqrt{2}$(偏角 $\frac{3\pi}{4}$) であるような楕円である． |∀|

B— わ〜〜最後のほう置いて行かれた〜〜〜

A— x, y の式から一度 x', y' の式へ書きなおすと，中心と長径，短径がわかるでしょ．

B— うん，で，そのあとが意味不明．

S— よく見ると，(x', y') から原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転すると (x, y) になっている．（これは見つけるしかないね！）

A— で，楕円の状況を x, y に翻訳したわけか．

基礎問題 5.6　2 次曲線 $x^2-4xy+4y^2-2x-y=0$ の標準形を求めよ.

解答:　2 次の部分を $ax^2+bxy+cy^2$ に当てはめて考えると $a=1, b=-4, c=4$ であるので，$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ とする．固有値を求める．$|xI-A|=\begin{vmatrix}x-1 & 2\\ 2 & x-4\end{vmatrix}=x(x-5)=0$ より，固有値は $0, 5$ である.

固有値 5 の固有ベクトルは $\begin{cases}x-2y=5x\\ -2x+4y=5y\end{cases}$ を解いて $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$，固有値 0 の固有ベクトルは $\begin{cases}x-2y=0\\ -2x+4y=0\end{cases}$ を解いて $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ となる.

それぞれ長さを 1 にして並べると，$P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ となる.

$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y')\end{cases}$ と一次変換すると，(計算中略)

$x'^2-y=0$ が標準形である．これは放物線であり，x, y の 2 次曲線は放物線を回転させたものである．回転角を θ とすると，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ をみたすような θ であることがわかる.

|∀|

C— あとで「まみどんチョイス」してもらお.

A— なにそれ.

C— 単位取れるための秘密のおまじない〜〜♪「まみどん」が指差した問題は必ず試験に出るらしいよ〜〜

A— ボクもボクも〜〜♪（なにそれ？ ホントかな？）

後期期末試験

＜予習＞

- 4-1:内積と性質
- 4-2:正規直交基底とシュミットの直交化法
- 4-3:等長性と直交行列
- 4-4:外積，平行６面体の体積
- 5-1:固有値，固有空間
- 5-2:対称行列の対角化と２次形式

後期期末試験

[4-1]

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$ が直交するような a を求めよ.

(2) 点 $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．平面 $x-2y+z=0$ 上の点 P であって，三角形 POA が正三角形になるようなものを求めよ.

[4-2]

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をシュミットの直交化法によって正規直交基底にせよ.

(2) $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を含むような正規直交基底を求めよ.

[4-3]

直交行列 A の行列式 $|A|$ は ± 1 であることを示せ.

[4-4]

(1) 4 点 $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を示せ.

[5-1]

(1) $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\3 & 2 & 6\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ について A を対角化せよ.

(2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^n$ を求めよ.

[5-2]

(1) $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$ について A を直交行列 P により対角化せよ.

(2) 2 次曲線 $x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$ の標準形を求めよ.